# John Tate, le grand explorateur de la théorie algébrique des nombres

Hugo Chapdelaine

$1^{er}$ Mai 2010

Pour l'année 2010, l'académie norvégienne des sciences et des lettres a décidé de remettre le prestigieux prix Abel au mathématicien américain John Torrence Tate Jr. Son oeuvre est impressionnante. Elle se rapporte principalement au domaine de la théorie algébrique des nombres. Dans un premier temps, ses travaux présentent une multitude d'outils et de techniques pour étudier les liens mystérieux observés par les mathématiciens entre trois types d'objets qui sont a priori de nature différente: les représentations galoisiennes, les $L$-fonctions et les variétiés arithmétiques. Afin de préciser et de décrire ces liens mystérieux, Tate a introduit une panoplie de concepts mathématiques qui portent aujourd'hui son nom: le module de Tate, le groupe de Tate-Shafarevich, la courbe de Tate, la hauteur de Néron-Tate, les groupes de Barsotti-Tate et le groupe de Mumford-Tate en sont quelques exemples. Dans un deuxième temps, Tate a formulé de nouvelles conjectures (par exemple sa conjecture sur les cycles algébriques) qui ont **eu** comme impact d'offrir un cadre plus naturel et plus général pour des conjectures formulées dans un langage plus classique, comme par exemple la célèbre conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer. Cet horizon mathématique envisagé par John Tate a donné naissance à plusieurs directions de recherche qui caractérisent aujourd'hui la théorie algébrique des nombres contemporaine. Nous présenterons dans ce texte un bref survol de cette branche des mathématiques en soulignant **quelques-uns** des résultats marquants de son oeuvre pour la période 1950 à 1970.

Un nombre algébrique sur $\mathbb{Q}$ est un nombre complexe qui est le zéro d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$. L'ensemble des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$ est un corps noté par $\overline{\mathbb{Q}}$, *le corps des nombres algébriques.* Afin d'étudier ce corps, on introduit le groupe de *Galois absolu de* $\mathbb{Q}$, $G_{\mathbb{Q}} := Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ qui décrit en quelque sorte l'ensemble des symétries de l'extension $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$. Le groupe $G_{\mathbb{Q}}$ est très mystérieux et il n'est pas exagéré de dire que l'objet d'étude principal de la théorie algébrique des nombres consiste à étudier ce dernier. Le groupe $G_{\mathbb{Q}}$ est un groupe profini naturellement isomorphe à $\varprojlim_K Gal(K/\mathbb{Q})$, où la limite projective parcourt les extensions galoisiennes de degré fini sur $\mathbb{Q}$. Afin d'étudier $G_{\mathbb{Q}}$, on peut étudier ses représentations linéaires continues de dimension $n$ à coefficients dans un corps topologique $L$. Une telle représentation n'est rien d'autre qu'un homomorphisme de groupes *continu* $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_n(L)$. Le corps $L$ ici étant habituellement choisi comme le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ ou un corps local non-archimédien comme par exemple $\mathbb{Q}_p$, le corps des nombres $p$-adiques.

À partir de maintenant, nous supposerons que toutes les représentations considérées sont continues. Remarquons qu'en général, les représentations linéaires $p$-adiques sont beaucoup plus riches que les représentations linéaires complexes. Il est facile de voir qu'une représentation complexe $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_n(\mathbb{C})$ a nécessairement une image finie puisque $im(\rho)$ est un sous-groupe compact et totalement disconnexe de $GL_n(\mathbb{C})$. La situation en est tout autre pour les représentations $p$-adiques qui peuvent avoir en général une image très grande dans $GL_n(\mathbb{Q}_p)$. Ceci s'explique par le fait que la topologie profinie du groupe $G_{\mathbb{Q}}$ est "compatible" avec la topologie de $\mathbb{Q}_p$. Donnons trois exemples de telles représentations $p$-adiques: Soit $\mu_{p^\infty} = \bigcup_{n\geq 1}\{z \in \mathbb{C} : z^{p^n} = 1\}$ le groupe des racines de l'unité d'ordre une puissance de $p$. Alors $G_{\mathbb{Q}}$ agit naturellement sur l'ensemble $\mu_{p^\infty}$ par permutation de ses éléments. On obtient donc une représentation $p$-adique de dimension 1,

$$\chi_p : G_{\mathbb{Q}} \to Aut(\mu_{p^\infty}) \simeq \mathbb{Z}_p^\times \subseteq \mathbb{Q}_p^\times.$$

Si $E$ est une courbe elliptique (variété abélienne de dimension un) définie sur $\mathbb{Q}$, alors on peut considérer le module de Tate de $E$ en $p$ à savoir $T_p(E) := E[p^\infty]$. En d'autres mots, $T_p(E)$ est le sous-groupe des points d'ordre une puissance de $p$ de $E(\overline{\mathbb{Q}})$. De manière similaire à $\mu_{p^\infty}$, le groupe $G_\mathbb{Q}$ agit naturellement sur $T_p(E)$ et on obtient donc une représentation de dimension 2,

$$\rho : G_\mathbb{Q} \to Aut(T_p(E)) \simeq GL_2(\mathbb{Z}_p) \subseteq GL_2(\mathbb{Q}_p).$$

Les deux exemples précédents sont des cas particuliers de *représentations $p$-adiques géométriques* obtenues à partir de la *cohomologie étale*, une cohomologie pour les variétés algébriques qui a été développée au début des années soixante par Alexandre Grothendieck et ses élèves. En général, si $X/\mathbb{Q}$ est une variété projective et lisse sur $\mathbb{Q}$, on peut considérer son $i$-ème groupe de cohomologie étale $p$-adique $V_i := H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_p)$. La cohomologie étale joue un rôle de premier plan en théorie algébrique des nombres un peu similaire au rôle de la cohomologie singulière en topologie algébrique. On a même un *isomorphisme de comparaison* entre ces deux cohomologies qui affirme que $V_i \simeq H^i_{\text{sing}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{Q}_p$ en tant que $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel. Cependant, la cohomologie étale a une particularité supplémentaire qui la distingue de la cohomologie singulière: les groupes de cohomologie étale de $X/\mathbb{Q}$ sont naturellement munis d'une action linéaire continue de $G_\mathbb{Q}$. On obtient donc une représentation $p$-adique

$$\rho_i : G_\mathbb{Q} \to Aut(V_i) \simeq GL_{b_i}(\mathbb{Q}_p)$$

où $b_i = dim_{\mathbb{Q}_p}(V_i)$. Si $V$ est une représentation géométrique $p$-adique de $G_\mathbb{Q}$ alors on peut "tordre" cette dernière par une puissance entière de $\chi_p$. Pour $i \in \mathbb{Z}$, on pose $V(i) := V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \chi_p^i$. Par exemple, si $E/\mathbb{Q}$ est une courbe elliptique et $V = H^1_{\text{ét}}(E_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_p)$ alors $V(1) \simeq T_p(E)$ en tant que représentation galoisienne. De telles représentations de $G_\mathbb{Q}$ jouent un rôle de premier plan en théorie algébrique des nombres. À titre d'exemple, la non-existence de certaines représentations $p$-adiques ($p$ un premier impair) de dimension 2 de $G_\mathbb{Q}$ implique le dernier théorème de Fermat à savoir que l'équation $x^p + y^p = z^p$ n'a pas de solutions non-triviale ($xyz \neq 0$) dans les entiers! L'idée de la preuve est de considérer une solution hypothétique $a^p + b^p = c^p$ et de lui associer la courbe elliptique $E : y^2 = x(x - a^p)(x + b^p)$. Par la suite, on considère la représentation $\rho_E : G_\mathbb{Q} \to Aut(E[p^\infty])$ et on montre qu'une telle représentation ne peut exister, car si elle existait elle satisferait des propriétés trop merveilleuses! Ce résultat spectaculaire est une conséquence des travaux de plusieurs mathématiciens: Frey, Serre, Ribet, Wiles, Taylor...

Soit $K$ un corps de nombres (il s'agit d'un exemple de *corps global*) et $G_K := Gal(\overline{\mathbb{Q}}/K)$ le sous-groupe ouvert de $G_\mathbb{Q}$ qui lui est associé. L'étude des représentations $p$-adiques géométriques de $G_\mathbb{Q}$ est intimement liée à **celle** de ses sous-groupes ouverts $G_K$. À partir de maintenant, on fixe un corps de nombres $K$ et on pose $G := G_K$. Le groupe $G$ est un exemple de *groupe de Galois global*. Afin d'étudier les représentations $p$-adiques géométriques $\rho$ de $G$ on introduit une collection de sous-groupes de Galois locaux de $G$ qui auront l'avantage, du moins individuellement, d'être beaucoup plus simples que $G$; par la suite on étudie la restriction de $\rho$ à ces sous-groupes.

Nous allons maintenant introduire certains concepts de base techniques mais néanmoins essentiels pour pouvoir passer du global au local. On définit $M_K$ comme étant l'ensemble des classes d'équivalence des normes sur $K$ (en tant que corps). Un élément $\nu \in M_K$ est appelé une place de $K$. Soit $|| \ ||_\nu$ une norme (arbitrairement choisie) dans la classe d'équivalence $\nu$. La complétion de $K$ par rapport à $|| \ ||_\nu$ est un *corps local* noté par $K_\nu$. On peut montrer que $K_\nu$ est isomorphe (comme corps) à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ où à une extension de degré fini du corps $p$-adique $\mathbb{Q}_p$ pour un certain premier $p$. Si le corps $K_\nu$ est une extension de degré fini de $\mathbb{Q}_p$ alors nous dirons que la place $\nu$ est une place finie au-dessus de $p$. Si $K_\nu$ est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$ alors nous dirons que la place $\nu$ est infinie. Par exemple, si $K = \mathbb{Q}$, alors $M_\mathbb{Q} = \{p : p \text{ est premier}\} \cup \{\infty\}$ et donc pour $\nu = \infty$ on trouve $\mathbb{Q}_\nu \simeq \mathbb{R}$ et pour $\nu = p$ on trouve $\mathbb{Q}_\nu \simeq \mathbb{Q}_p$. Dans le cas où la place $\nu$ est finie, on définit l'anneau des entiers de $K_\nu$ comme étant $\mathcal{O}_{K_\nu} := \{x \in K_\nu : ||x||_\nu \leq 1\}$. L'anneau $\mathcal{O}_{K_\nu}$ est un anneau local où l'idéal maximal $\mathfrak{m}_\nu := \{x \in \mathcal{O}_{K_\nu} : ||x||_\nu < 1\}$ est principal. Pour chacune des places finies de $M_K$ choisissons une fois pour **toutes** (de manière arbitraire) un générateur $\pi_\nu$ de $\mathfrak{m}_\nu$. Soit $\nu \in M_K$ une place finie, alors il est utile de définir $| \ |_\nu$ comme étant *l'unique norme* dans la classe d'équivalence de $\nu$ telle que $|\pi_\nu|_\nu = \frac{1}{q_\nu}$ où $q_\nu$ correspond à la cardinalité du corps résiduel $\kappa_\nu := \mathcal{O}_{K_\nu}/\mathfrak{m}_\nu$. Dans le cas où $\nu$ est une place infinie, on définit $| \ |_\nu$ comme étant tout simplement la valeur absolue usuelle sur les réels ou les complexes. Soit $\overline{K}_\nu$ une clôture algébrique de $K_\nu$. Alors on peut montrer que la norme $| \ |_\nu$ sur $K_\nu$ admet une unique extension au corps $\overline{K}_\nu$ que l'on note encore par $| \ |_\nu$. De manière similaire, on pose

$\overline{\mathcal{O}}_{K_\nu} = \{x \in \overline{K}_\nu : |x|_\nu \leq 1\}$, $\overline{\mathfrak{m}}_\nu := \{x \in \mathcal{O}_{\overline{K}_\nu} : |x|_\nu < 1\}$ et $\overline{\kappa}_\nu := \mathcal{O}_{\overline{K}_\nu}/\overline{\mathfrak{m}}_\nu$. Cependant, contrairement à $\mathfrak{m}_\nu$, l'idéal $\overline{\mathfrak{m}}_\nu$ n'est plus principal. Pour chacune des places $\nu \in M_K$, on choisit un plongement $\iota_\nu : \overline{K} \subseteq \overline{K}_\nu$ (ce plongement est loin d'être unique en général!). À chacun de ces plongements correspond une inclusion (le morphisme de restriction) $j_\nu : G_\nu \subseteq G$ où $G_\nu := Gal(\overline{K}_\nu/K_\nu)$ est le groupe de Galois absolu de $K_\nu$. Le groupe $G_\nu$ est un exemple de *groupe de Galois local.* On a donc ainsi associé une collection de sous-groupes $\{G_\nu\}_\nu$ au groupe $G$. Remarquons que si l'on remplace un plongement $\iota_\nu$ par un plongement $\iota'_\nu$ ceci aura pour effet de remplacer le groupe $G_\nu$ par un de ses groupes conjugués dans $G$. Finalement, chacun des groupes $G_\nu$ peut être inséré dans une suite exacte

$$1 \to I_\nu \to G_\nu \overset{res}{\to} \overline{G}_\nu \to 1,$$

où $\overline{G}_\nu := Gal(\overline{\kappa}_\nu/\kappa_\nu)$ et $I_\nu$ est le noyau du morphisme naturel de restriction $res : G_\nu \to \overline{G}_\nu$. Le sous-groupe $I_\nu$ est appelé le *sous-groupe d'inertie* en $\nu$. Le groupe de Galois résiduel $\overline{G}_\nu$ est un groupe procyclique généré par un élément $Frob_\nu \in \overline{G}_\nu$ caractérisé de la manière suivante: $Frob_\nu(x) \equiv x^{q_\nu} \pmod{\overline{\mathfrak{m}}_\nu}$ pour tout $x \in \mathcal{O}_{\overline{K}_\nu}$. Cet élément $Frob_\nu$ est appelé le *Frobenius en* $\nu$.

Jusqu'à maintenant, nous avons parlé des variétés arithmétiques et des représentations galoisiennes associées à ces dernières par l'intermédiaire de la cohomologie étale. Nous allons maintenant **expliquer** comment l'on peut associer une $L$-fonction à une représentation galoisienne. Soit $\rho : G \to GL_n(\mathbb{Q}_p)$ une représentation géométrique $p$-adique (i.e. qui provient de la cohomologie étale $p$-adique d'un variété algébrique définie sur $K$) de dimension $n$. Pour chacune des place $\nu \in M_K$ on peut considérer la *restriction* de $\rho$ en $\nu$, $\rho_\nu := \rho|_{G_\nu} : G_\nu \to GL_n(\mathbb{Q}_p)$ qui est un exemple de *représentation locale.* Nous dirons que la représentation $\rho$ est *non-ramifiée* en $\nu$ si $I_\nu \subseteq \ker \rho_\nu$. On peut montrer que $\rho$ est ramifiée seulement en un nombre fini de places de $M_K$. À chacune des représentations locales $\rho_\nu$ on peut associer une *$L$-fonction locale* $L(\rho_\nu, s)$ qui est une certaine fonction méromorphe du plan complexe en la variable $s$. Nous nous limiterons seulement à donner la définition exacte de $L(\rho_\nu, s)$ dans le cas où $\rho$ est non-ramifiée en $\nu$. Dans ce cas, la $L$-fonction $L(\rho_\nu, s)$ est donnée par la formule suivante:

$$L(\rho_\nu, s) := \det\left(I_n - \rho(\sigma_\nu) \cdot t\right)\Big|_{t=q_\nu^{-s}},$$

où $I_n$ est la matrice identité de dimension $n$, $t$ **est une variable** et $\sigma_\nu$ est tel que $res(\sigma_\nu) = Frob_\nu^{-1}$. On peut montrer que deux choix différents $\sigma_\nu$ et $\sigma'_\nu$ sont nécessairement conjugués (ceci utilise le fait que $\rho$ est non-ramifiée en $\nu$). Par conséquent, la définition de $L(\rho_\nu, s)$ est **bel et bien** indépendante du choix de $\sigma_\nu$ puisque $p_\nu(t) := \det\left(I_n - \rho(\sigma_\nu) \cdot t\right)$ n'est rien d'autre que le polynôme caractéristique en $t$ de la matrice $\rho(\sigma_\nu)$. Grâce à Deligne on sait même que $p_\nu(t)$ est un polynôme à coefficients rationnels. Ceci est surprenant, car a priori on sait seulement que les coefficients de $p_\nu(t)$ sont dans $\mathbb{Q}_p$. Qui plus est, Deligne **a** même démontré que ce polynôme $p_\nu(t)$ est indépendant du nombre premier $p$ choisi!. Finalement, remarquons qu'en général la définition de la $L$-fonction locale est telle que $L(\rho_\nu, s)$ ne dépend pas du choix du plongement $\iota_\nu$. Maintenant, ayant en main cette collection de $L$-fonctions locales, on peut définir une *$L$-fonction globale* de la manière suivante:

$$L(\rho, s) := \prod_{\nu \in M_K} L(\rho_\nu, s), \tag{0.1}$$

qui est une fonction analytique en $s$ qui converge dans un demi-plan vertical approprié du plan complexe. Par exemple, si $\rho = 1$ est le caractère trivial de dimension 1, alors pour $\nu = p$ on a $L(\rho_p, s) = (1 - p^{-s})^{-1}$ et pour $\nu = \infty$ on a $L(\rho_\infty, s) = \pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})$ où $\Gamma$ correspond à la fonction gamma. Dans ce cas particulier, il suit que

$$\frac{L(\rho, s)}{L(\rho_\infty, s)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} =: \zeta(s)$$

où $\zeta(s)$ n'est rien d'autre que la célèbre fonction zêta de Riemann! On conjecture que ces $L$-fonctions globales admettent un prolongement méromorphe sur tout le plan complexe et qu'elles satisfont une certaine équation fonctionnelle similaire à celle de la fonction zêta de Riemann qui est donnée par la formule simple suivante:

$$L(\rho_\infty, s)\zeta(s) = L(\rho_\infty, 1 - s)\zeta(1 - s).$$

En général pour les représentations galoisiennes de dimension strictement plus grande que 1, on **connaît** très peu de résultats à ce sujet.

Ayant maintenant à l'esprit le "vocabulaire mathématique" tel que présenté ci-haut, nous allons maintenant tenter de peindre, à l'aide de celui-ci, un vague contour de quelques idées maîtresses de l'oeuvre de John Tate. À la fin des années quarante, Tate fait un doctorat sous la direction de Emil Artin à l'université de Princeton. Dans sa thèse, il redémontre de manière tout à fait innovatrice, le prolongement analytique et l'équation fonctionnelle des $L$-fonctions associés aux *représentations* **de** *$G$ les plus simples*, i.e., celles de dimension 1. Sa méthode consiste à faire de l'analyse de Fourier sur un certain groupe abélien localement compact $\mathbb{A}_K = \prod'_{\nu \in M_K} K_\nu$, appelé le *groupe des adèles de $K$*. Le $'$ du produit indique que sauf pour un nombre fini de places de $M_K$ la composante $\nu$ d'un élément $x = (x_\nu)_\nu \in \mathbb{A}_K$ est un élément de $\mathcal{O}_{K_\nu}$. Remarquons que l'on peut voir le corps $K$ comme un sous-groupe de $\mathbb{A}_K$ via le plongement diagonal. Le groupe $\mathbb{A}_K$ (en fait il s'agit même d'un anneau topologique) avait été introduit quelques années auparavant par Chevalley afin de reformuler la théorie des corps de classes, une théorie pouvant être conçue comme une généralisation de la célèbre loi de réciprocité quadratique de Gauss. Cette nouvelle approche amorcée par Tate, sera le premier pas des méthodes adéliques développées quelques années plus tard dans le cadre du programme de Langlands. L'un des objectifs principal de ce programme est de construire une "correspondance $\pi$" entre deux mondes qui sont en apparence distincts à savoir d'un côté, le monde des représentations irréductibles de $G$ de dimension $n$ à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$ (ici $p$ est un nombre premier arbitrairement choisi!), ce monde **sera** noté par $\mathcal{R}G$, et de l'autre côté, le monde des représentations automorphes cuspidales de $GL_n$, noté par $\mathcal{R}A$. Remarquons ici, que le corps de nombres $K$ et l'entier $n$ sont fixés. Une représentation automorphe cuspidale de $GL_n$ (par rapport au corps de nombres $K$) est un type très spécial de repésentations $\mathbb{C}$-linéaires (de dimension infinie en général sur $\mathbb{C}$!) associée au groupe topologique $GL_n(\mathbf{A}_K)$. Pour des raisons d'économie, nous nous abstiendrons d'en donner la définition. La chose importante ici à savoir est que pour chaque représentation automorphe $\rho'$ de $GL_n$ on peut lui associer une $L$-fonction globale $L(\rho', s)$ qui est aussi définie comme un produit de $L$-fonctions locales. La correspondance $\pi : \mathcal{R}G \to \mathcal{R}A$ est unique si l'on impose à celle-ci un certain nombre de conditions naturelles à satisfaire, dont en particulier, la relation importante $L(\rho, s) = L(\pi(\rho), s)$ pour tout $\rho \in \mathcal{R}G$. En particulier, si l'on suppose qu'une telle correspondance existe, une de ses manifestations consiste à dire que "la $L$-fonction associée à une représentation galoisienne coïncide avec la $L$-fonction asscociée à une certaine représentation automorphe". De manière imagée, on peut donc dire que la notion de $L$-fonction joue le rôle de passerelle entre ces deux mondes. En général, on s'attend à ce que l'application $\pi$ soit "injective" mais non pas "surjective". En d'autres mots, le mondes des représentations galoisiennes constitue seulement une partie du monde des représentations automorphes.

Au début des années cinquante, Tate et Artin développent une théorie abstraite de la théorie des corps de classes locaux et globaux en introduisant des concepts clés comme les "formations de classes"et le "groupe de Weil". Un des résultats principaux de la théorie des corps de classes donne une description adélique de l'abélianisé de $G$ via la suite exacte suivante

$$1 \to C_K^o \to C_K \overset{rec}{\to} G^{ab} \to 1,$$

où $G^{ab}$ correspond à l'abélianisé de $G$, $C_K := \mathbb{A}_K^\times / K^\times$ correspond au *groupe des idèles de $K$* et $C_K^o$ correspond à la composante connexe de l'identité de $C_K$. L'application $rec : C_K \to G^{ab}$ est la fameuse application de réciprocité qui est donnée par la théorie des corps de classes. Nous en profitons ici pour signaler que les représentations automorphes de $GL_1$ (qui sont nécessairement irréductibles) ne sont rien d'autre que les homomorphismes de groupes **continus** $\chi : C_K \to \mathbb{C}^\times$. En parallèle, Tate développe une panoplie d'outils pour étudier la cohomologie galoisienne sur les corps locaux et globaux. Il introduit les groupes de cohomologie de Tate qui sont une variation de la cohomolgie usuelle des groupes finis qui combine l'homologie et la cohomologie des groupes dans une seule et même suite. L'un de ses résultats les plus célèbres en cohomologie galoisienne est son résultat de "dualité locale" qui affirme que pour tout $G_\nu$-module fini $A$ ($\nu$ étant ici une place finie de $K$), l'accouplement naturel suivant (donné par le cup-produit)

$$H^i(G_\nu, A) \times H^{2-i}(G_\nu, A') \to H^2(G_\nu, \mu) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad i \in \{0, 1, 2\}$$

est parfait. Ici $\mu$ correspond **au** groupe des racines de l'unité de $\overline{K}_\nu$ et $A' = Hom(A, \mu)$ est le dual de Tate associé à $A$. Ce résultat de dualité locale est maintenant devenu un outil standard pour tout théoricien algébrique des nombres.

En 1962, Tate découvre qu'une courbe ellitptique $E/\mathbb{Q}_p$ qui a une mauvaise réduction multiplicative en $p$ admet une uniformisation $p$-adique, i.e., $E(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}_p^\times/\langle q_E^{\mathbb{Z}}\rangle$ (courbe de Tate avec période $q_E$) où l'isomorphisme est en tant qu'*espace rigide analytique*. Cette découverte sera le tout début de la géométrie rigide analytique. En 1964, Tate publie un article intitulé "Algebraic cycles and poles of zeta functions". Dans cet article visionnaire, Tate formule sa célèbre *conjecture sur les cycles algébriques*. Cette conjecture prévoit des liens étroits entre valeurs spéciales de $L$-fonctions et cycles algébriques sur des variétés arithmétiques. Soit $k$ un corps de type fini sur son sous-corps premier (hypothèse essentielle qui est trivialement satisfaite si $k$ est un corps fini ou un corps de nombres) et soit $X$ un shéma projectif et lisse de type fini sur $k$. Dans cet article, Tate donne des conjectures précises qui, de manière simplifiée, prédisent que si une classe de cohomologie $[c] \in H^{2i}_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_p)(i)$ est fixée sous l'action du groupe de Galois $G_k$, alors la classe de $[c]$ peut être représentée par un cycle algébrique de $X$ de codimension $i$ qui est défini sur $k$. Dans le cas où $k$ est un corps fini, Tate montre que cette conjecture implique que le rang du groupe abélien des cycles algébriques de codimension $i$ de $X$ définis sur $k$ (modulo une relation d'équivalence adéquate) coïncide avec l'ordre du pôle en $s = i$ de la fonction zêta de Weil associée à $X/k$. Dans ce même article, s'inspirant des implications de sa conjecture lorsque $k$ est fini, Tate généralise la célèbre conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer en incluant cette dernière dans un cadre plus général et plus naturel. La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer affirme que si $E/K$ est une courbe elliptique définie sur un corps de nombres $K$, alors le rang du groupe abélien des points $K$-rationels de $E$ (noté par $E(K)$) est égal à l'ordre d'annulation en $s = 1$ de la $L$-fonction (notée par $L(E/K, s)$) associée à la représentation galoisienne de $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/K)$ sur $H^1_{\text{ét}}(E_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_p)(1)$. Cette conjecture est le prototype par excellence du lien mystérieux qui existe entre "cycles algébriques"(points $K$-rationnels sur la courbe $E$) et valeurs spéciales de $L$-fonctions **(l'ordre d'annulation de $L(E/K, s)$ en $s = 1$)**. Deux années après la publication de cet article visionnaire, Tate démontre un résultat particulier mais important concernant sa conjecture dans le cas où $k$ est un corps fini, $i = 1$ et $X = A \times B$ est le produit de deux variétés abéliennes définies sur $k$. Remarquons ici que les les variétés abéliennes sont des variétés projectives et lisses munies d'une structure de groupe abélien. C'est cette structure de groupe additionnelle qui laisse à croire que la conjecture est plus accessible dans ce cas. Il essaiera pendant plusieurs années de généraliser ce résultat au cas où $k$ est un corps de nombres mais malheureusement en vain. Il faudra attendre près de 20 ans avant d'avoir finalement une preuve (fruit des travaux de Faltings) de ce résultat clef tant convoité par Tate. À cette même époque, son étude systématique des variétés abéliennes sur les corps finis lui permet de donner une classification complète de ces dernières, à isogénie près, en termes de leurs Frobenius. Cette théorie porte aujourd'hui le nom de théorie de Honda-Tate. En 1983, Gerd Faltings crée une sensation forte dans le monde mathématique en démontrant la fameuse conjecture de Mordell qui affirme qu'une courbe projective de genre $\geq 2$ sur un corps de nombres $K$ n'a seulement qu'un nombre fini de points $K$-rationnels. Une étape cruciale dans sa preuve consiste à généraliser le résultat de Tate ($X = A \times B$ avec $i = 1$) en permettant cette fois-ci au corps de base $k$ d'être un *corps de nombres quelconque*. Jusqu'à ce jour, on connaît très peu d'exemples de paires $(X/k, i)$, $X/k$ étant une variété algébrique définie sur un corps de nombres $k$ et $i$ un entier tel que $0 < i < \dim X$, pour lesquels on sache montrer la conjecture de Tate sur les cycles algébriques.

En 1965, Tate avec la collaboration de S. Lubin développe la théorie des groupes formels à un paramètre et l'applique à la théorie des corps de classes locaux. Cette avancée permet de redémontrer la théorie des corps de classes locaux de manière plus explicite en construisant directement une extension abélienne maximale totalement ramifiée de $K_\nu$ en y adjoignant les points de torsions d'un certain groupe formel à un paramètre $\mathcal{F}/K_\nu$. Jusqu'à ce jour, une telle construction fait toujours défaut dans le cas global, i.e., lorsque l'on remplace le corps local $K_\nu$ par le corps global $K$. En 1966, dans un article intitulé "$p$-divisible groups", fruit d'une collaboration avec Jean-Pierre Serre, Tate met en évidence la richesse des représentations linéaires de $G_\nu$ ($\nu$ étant une place au-dessus de $p$) obtenues à partir des points de torsion d'un groupe $p$-divisible $\mathcal{G}/K_\nu$. Il s'agit là des débuts de la théorie de Hodge $p$-adique. À cette même époque, il développe aussi avec Serre une théorie de la déformation pour les variétés abéliennes. Finalement, il faut souligner l'apport substantiel de John Tate à la théorie des courbes elliptiques, un apport aussi bien théorique que calculatoire. Plusieurs de ses résultats sont maintenant bien ancrés dans cette branche specialisée de la théorie algébrique des nombres: la hauteur de Néron-Tate, la théorie de la descente, la construction du groupe de Tate-Shafarevich et l'algorithme de Tate en sont quelques exemples.

Ceci termine donc la description en mots de "l'image mentale" que l'auteur de ce texte a construit de l'oeuvre de John Tate pour la période $1950 - 1970$. Depuis les années 70, Tate a continué à enrichir les mathématiques avec ses travaux sur la $K$-théorie algébrique, les conjectures de Stark et plus récemment, la théorie des anneaux non-commutatifs. En résumé, la théorie algébrique des nombres contemporaine doit énormément à l'imagination fertile de John Tate. Le nombre de concepts mathématiques qui portent son nom est un témoignage sans équivoque de sa grande influence sur ce domaine des mathématiques.