Décompositon primaire pour les sous-modules et notions de dimension pour les anneaux commutatifs

Hamid Mesbah

Travail dirigé sous la direction de

Hugo Chapdelaine

Université Laval

3 septembre 2015

Table des matières

Introduction

Dans ce travail, nous présentons certaines des idées maîtresses de l'algèbre commutative qui se sont développées durant la période 1900-1930 grâce à trois mathématiciens allemands : David Hilbert (1862-1943), Emmy Noether (1882-1935) et Wolfgang Krull (1899-1971).

Pour tout ce travail, les anneaux considérés sont commutatifs. Pour la suite de l'introduction, R sera un anneau noethérien et M un R-module de type fini. Aussi, $(A, \mathfrak{m})$, dénotera un anneau local noethérien ayant $\mathfrak{m}$ comme idéal maximal. Le premier résultat principal démontré dans ce travail est la décomposition primaire associée à un sous-module $N \leq M$. Le deuxième résultat d'importance démontré dans ce travail, est la comparaison des différentes notions de dimension associées à A.

Donnons une brève description de chacune des sections. À la Section 1, on rappelle plusieurs résultats classiques de l'algèbre commutative qui sont dûs principalement à Noether et Krull. Plusieurs de ces résultats sont démontrés de manière détaillée. À la Section 2, on introduit la notion d'idéaux premiers de R associés au R-module M. On étudie en détail cette dernière notion. À la Section 3, on démontre le Théorème de la décomposition primaire associée à un sous-module $N \leq M$. À la Section 4, on introduit quatre invariants ($\dim(A), s(A), e(A)$ et $\delta(A)$) que l'on peut associer à n'importe quel anneau local noethérien. À la Section 5, on compare ces quatre invariants. Finalement, à la Section 6, on donne certains résultats qui relient la dimension de Krull de S et $S[x]$ pour S un anneau commutatif quelconque. Ici $S[x]$ correspond à l'anneau des polynômes à une variable à coefficients dans S. Dans le cas où S est noethérien, on donne une relation exacte, à savoir que $\dim S + 1 = \dim S[x]$.

Pour tout le travail, A dénotera toujours un anneau unitaire, $0 = 0_A$ son élément neutre additif et $1 = 1_A$ son identité. Il se peut aussi que certains énoncés soient seulement vrais lorsque $1 \neq 0$, i.e., lorsque A n'est pas l'anneau trivial. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier quand est-ce que cette hyothèse s'avère nécessaire.

1 Résultats de base de la théorie des anneaux commutatifs

1.1 Deux lemmes classiques sur les idéaux premiers

Voici trois lemmes classiques sur les idéaux premiers. Les deux premiers lemmes seront utilisés de manière systématique dans ce travail.

Proposition 1.1. *Soit $I_1, \ldots, I_n$ des idéaux d'un anneau A et P un idéal premier de A. Si P contient le produit $I_1 I_2 \ldots I_n$, alors il contient l'un des I_j.*

Preuve facile. $\square$

Lemme 1.2. *(lemme d'évitement pour les premiers) Soit A un anneau et $I, P_1, \ldots, P_n \subseteq A$ des idéaux où les P_i sont premiers. Supposons que $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$. Alors il existe un indice $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $I \subseteq P_i$.*

Remarque 1.3. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de supposer tous les P_i soient premiers ; il suffit seulement que $n - 2$ parmi eux le soient, voir Bourbaki, chapitre 2, Proposition 2.

Preuve Par récurrence, la cas $n = 1$ est trivial. On suppose que les P_i n'ont aucune relation d'inclusion entre eux sinon on est ramené au cas de $n - 1$ idéaux premiers. On va montrer que si I n'est pas contenu dans aucun des P_i alors il existe $x \in I$ qui n'appartient à aucun des P_i. Par hypothèse d'induction, il existe $y \in I$ tel que $y \notin P_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Si $y \notin P_n$ on pose $x = y$. Si $y \in P_n$ on pose $x = y + zt_1t_2 \ldots t_{n-1}$ avec $z \in I \backslash P_n$ et $t_i \in P_i \backslash P_n$ pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Par construction, on a $x \in I$ et $x \notin P_i$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. Contradiction. $\square$

Proposition 1.4. *Soit A un anneau noethérien et $I \subseteq A$ un idéal. Alors I contient un produit fini d'idéaux premiers, i.e., il existe des idéaux premiers $P_1, P_2, \ldots, P_n \subseteq I$ tels que $I \supseteq P_1 \cdot P_2 \ldots P_n$.*

Preuve Soit

$$\mathcal{E} := \{J \subseteq A : J \text{ est un idéal ne contenant aucun produit fini d'idéaux premiers}\}.$$

On veut montrer que $\mathcal{E}$ est vide. Supposons le contraire. Dans ce cas, comme A est noethérien et $\mathcal{E} \neq \emptyset$, il existe un idéal $P \in \mathcal{E}$ tel que P est un élément maximal de $\mathcal{E}$ (où $\mathcal{E}$ est vu comme ensemble partiellement ordonné sous l'inclusion). Comme $P \in \mathcal{E}$, il suit que P n'est pas premier. Ainsi il existe $a_1, a_2 \in A \backslash P$, $a_1 a_2 \in P$. On considère les idéaux $Q_1 := (P, a_1)$ et $Q_2 := (P, a_2)$. Comme P est un élément maximal de $\mathcal{E}$ et $P \subsetneqq Q_1$ et $P \subsetneqq Q_2$, il suit que $Q_1 \notin \mathcal{E}$ et $Q_2 \notin \mathcal{E}$. En particulier, il existe des idéaux premiers $P_1, \ldots, P_r \subseteq A$ et $P'_1, \ldots, P'_s \subseteq A$ tels que $P_1 \cdots P_r \subseteq Q_1$ et $P'_1 \cdots P'_s \subseteq Q_2$. Ainsi

$$P_1 \cdots P_r P'_1 \cdots P'_s \subseteq Q_1 Q_2 \subseteq P.$$

Or ceci est absurde, car $P \in \mathcal{E}$. $\square$

1.2 Idéaux primaires et le radical d'un idéal

Définition 1.5. Soit $I \subseteq A$ un idéal. On dit que I est un idéal irréductible si pour toute paire d'idéaux $J, K \subseteq A$ telle que $J \cap K = I$ on a $J = I$ ou $K = I$.

Exemple 1.6. *Soit $P \subseteq A$ un idéal premier. Alors P est un idéal irréductible. En effet, soit $I, J \subseteq A$ deux idéaux tels que $I \cap J = P$. En particulier, on a $I \supseteq P$ et $J \supseteq P$. De plus, comme $P = I \cap J \supseteq IJ$ et P est premier, on doit avoir $P \supseteq I$ ou $P \supseteq J$. Ainsi, $P = I$ ou $P = J$.*

Définition 1.7. Soit I un idéal d'un anneau A. On dit que I est un idéal primaire si pour tout $a, b \in A$ tels que $ab \in I$ et $b \notin I$, il existe un $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tel que $b^n \in I$.

Exemple 1.8. *Un idéal premier $P \subseteq A$ est primaire.*

Remarque 1.9. Notons qu'un idéal $Q \subseteq A$ est primaire si et seulement si tous les diviseurs de zéro de A/Q sont nilpotents.

Définition 1.10. Soit $I \subseteq A$ un idéal de A. On définit le radical de I comme

$$\sqrt{I} = \{a \in A : \exists n \geq 1 \text{ tel que } a^n \in I\}.$$

On voit sans difficultés, en utilisant la formule du binôme de Newton, que I est un idéal de A. En particulier, l'idéal $\sqrt{0}$ est l'ensemble des éléments nilpotents de A. On dit que l'anneau A est réduit si $\sqrt{0} = 0$, i.e., si A ne possède pas d'élément nilpotent non nul. On dira que I est un idéal réduit (ou un idéal radical) si $I = \sqrt{I}$ ce qui est équivalent à dire que l'anneau quotient A/I est réduit.

Proposition 1.11. *1. Soit $P \subseteq A$ est un idéal premier contenant un idéal $I \subseteq A$. Alors il contient aussi $\sqrt{I}$. En particulier, $P = \sqrt{P}$.*

2. Soit I, J deux idéaux de A. Alors $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

3. Soit $P_1, \ldots, P_n \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ des idéaux premiers. Alors l'idéal $P_1 \cap \cdots \cap P_n$ est réduit.

Preuve

(1) Soit $x \in \sqrt{I}$. Alors il existe $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tel que $x^n \in I \subseteq P$. Comme P est premier, ceci entraîne que $x \in P$. La seconde assertion en découle en prenant $P = I$. $\square$

(2) On a $IJ \subseteq I \cap J \subseteq I, J$. Ainsi $\sqrt{IJ} \subseteq \sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. Réciproquement, soit $x \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$, alors $\exists m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tels que $x^m \in I$ et $x^n \in J$ d'où $x^{n+m} \in IJ$ et donc $x \in \sqrt{IJ}$. $\square$

(3) Cela découle immédiatement des points (1) et (2) . $\square$

Proposition 1.12. *Soit $Q \subseteq A$ un idéal primaire. Alors $\sqrt{Q}$ est premier.*

Preuve facile. $\square$

Définition 1.13. Soit $I, P \subseteq A$ deux idéaux où P est premier et I est primaire. Si $\sqrt{I} = P$, on dira que I est P-primaire.

Proposition 1.14. *Soit A un anneau et soit I un idéal de A. Alors*

(1) I premier $\Leftrightarrow$ I irréductible et radical.

(2) $\sqrt{I}$ maximal $\Rightarrow$ I primaire.

Preuve

(1) La direction $\Rightarrow$ est claire. Pour la réciproque, soit $a, b \in A$ tels que $ab \in I$. On veut montrer que $a \in I$ ou $b \in I$. On a

$$((a) + I) \cdot ((b) + I) \subseteq I.$$

Donc

$$I^2 \subseteq (((a) + I) \cap ((b) + I))^2 \subseteq ((a) + I) \cdot ((b) + I) \subseteq I.$$

En prenant les radicaux, on obtient

$$\sqrt{I} = \sqrt{((a) + I) \cap ((b) + I)} = \sqrt{(a) + I} \cap \sqrt{(b) + I} \subseteq \sqrt{I}.$$

On a donc une égalité. Comme I est radical par hypothèse, $I = \sqrt{(a) + I} \cap \sqrt{(b) + I}$. Finalement, comme I est irréductible, il doit être égal à $(a) + I$ ou à $(b) + I$, i.e., $a \in I$ ou $b \in I$. $\square$

(2) Supposons que $\sqrt{I}$ est maximal. On veut montrer que I est primaire. Soit $a, b \in A$ tels que $ab \in I$, $a \notin I$ et $b^n \notin I$ pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. On va obtenir une contradiction. Par hypothèse, comme $b^n \notin I$ pour tout n, il suit que $b \notin \sqrt{I}$. Comme $\sqrt{I}$ est maximal et $b \notin \sqrt{I}$, on doit avoir $(b) + \sqrt{I} = A$. Ainsi, il existe $x \in A$ et $c^m \in I$, pour un certain m, tels que $1 = xb + c$. Donc $c^m = (1 - xb)^m$. Cette égalité implique que $c^m = 1 + yb$ pour un certain $y \in A$. Ainsi $a = a \cdot 1 = a(c^m - yb) = ac^m - yab \in I$. Ce qui est une contradiction. $\square$

1.3 Décomposition primaire des idéaux

Commençons par démontrer un lemme classique concernant les idéaux d'un anneau noethérien.

Théorème 1.15. *Soit A un anneau noethérien et I un idéal de A. Alors I est une intersection finie d'idéaux irréductibles.*

Preuve Soit X l'ensemble des idéaux de A qui ne peuvent être écrits comme une intersection finie d'idéaux irréductibles. Supposons que X est non vide. Comme A est noethérien, X possède un élément maximal J. Alors J n'est pas irréductible et donc J

est l'intersection de deux idéaux I_1 et I_2 qui le contiennent strictement. Mais alors, par maximalité de J, les idéaux I_1 et I_2 peuvent être écrits comme une intersection finie d'idéaux irréductibles. Il en est donc de même de J, contradiction. Cette contradiction montre que $X = \emptyset$. Le théorème suit. $\square$

Lemme 1.16. *Soit A un anneau noethérien et Q un idéal irréductible de A. Alors Q est un idéal primaire.*

Preuve Soit $a, b \in A$ tels que $ab \in Q$ et $b \notin Q$. Il faut montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tel que $a^n \in Q$. On pose $I_n = \{x \in A : a^n x \in Q\}$. Alors les I_n sont des idéaux qui forment une chaîne croissante, i.e., $I_1 \subseteq I_2 \ldots \subseteq I_n \ldots$.

Comme A est noethérien, il existe un n tel que $I_m = I_n$ si $m \geq n$. On pose $J = (a^n) + Q$ et $K = (b) + Q$. Notons que $K \supsetneqq Q$. On va monter maintenant que $Q = J \cap K$. Pour ce faire, il suffit de montrer que $J \cap K \subseteq Q$.

Soit $y \in J \cap K \subseteq J$ alors $y = a^n z + q$ pour un certain $q \in Q$ et $z \in A$. On a aussi $aK \subseteq Q$, car $ab \in Q$ par hypothèse. En particulier, $ay = a^{n+1}z + aq \in Q$ et donc $a^{n+1}z \in Q$. Ainsi $z \in I_{n+1} = I_n$ et donc $a^n z \in Q$. Comme $a^n z \in Q$ et $q \in Q$ on tire que $y \in Q$. Comme y était quelconque on a montré que $J \cap K \subseteq Q$ et donc $J \cap K = Q$.

Finalement, comme Q est irréductible, $J \cap K = Q$ et $K \supsetneqq Q$, on doit nécessairement avoir $J = Q$. Ainsi $a^n \in Q$. $\square$

Remarque 1.17. La réciproque au Lemme 1.16 est fausse. On peut considérer par exemple l'anneau $A = \mathbb{C}[x, y]$ et $I = (x^2, xy, y^2)$. On a que $\sqrt{I} = (x, y)$ est un idéal maximal et donc primaire par le (2) de la Proposition 1.14. Comme $I = (x, y^2) \cap (y, x^2)$, $(x, y^2) \supsetneqq I$ et $(x^2, y) \supsetneqq I$ il suit que I n'est pas irréductible.

Soit $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers et $I = (n) \subseteq \mathbb{Z}$ un idéal non-nul. Soit $n = \prod_{j=1}^{r} p_i^{e_i}$ la factorisation de n en premiers distincts. Alors

$$I = \bigcap_{i=1}^{r} (p_i^{e_i}). \tag{1.1}$$

Remarquons que chaque idéal $(p_i^{e_i})$ est (p_i)-primaire. Remarquons que l'écriture dans (1.1) est unique. Le théorème suivant peut être interprété comme une "généralisation de (1.1)" pour un anneau noethérien quelconque. Cependant, l'unicité de l'écriture est perdue en cours de route.

Théorème 1.18. *(Théorème de la décomposition primaire) Soit A un anneau noethérien et I un idéal de A. Alors il existe un nombre fini d'idéaux primaires $Q_1, \ldots, Q_n \subseteq A$ tels que*

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i \quad \textit{et} \quad \bigcap_{k \neq j} Q_k \nsubseteq Q_j \quad \textit{pour tout } j. \tag{$\star$}$$

Une telle écriture de I est dite non-redondante (ou minimale) et est appelée **une** *décomposition primaire de I. (Attention elle n'est pas unique en général). On pose*

$$\mathcal{S} := \{P_i := \sqrt{Q_i} : 1 \leq i \leq n\}.$$

Un élément minimal de $\mathcal{S}$ est appelé un premier isolé (relatif à l'écriture $(\star)$) alors qu'un élément non-minimal de $\mathcal{S}$ est appelé un premier plongé (relatif à lécriture $(\star)$). Finalement, tout idéal premier contenant I contient l'un des P_i. En particulier, il suit que $\mathcal{S}$ contient l'ensemble des idéaux premiers minimaux au-dessus de I et donc, les éléments minimaux de $\mathcal{S}$ (qui sont les idéaux premiers isolés relatif à lécriture $(\star)$) sont indépendants de l'écriture $(\star)$.

Preuve D'après le Théorème 1.15, il existe des idéaux irréductibles $Q_1, Q_2 \ldots, Q_n \subseteq A$ tels que $I = Q_1 \cap Q_2 \ldots \cap Q_n$. Par le Lemme 1.16, on sait que les Q_j sont primaires et donc que les $P_j = \sqrt{Q_j}$ sont premiers pour $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$. Ainsi

$$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n, \tag{1.2}$$

pour des Q_j primaires. Si $\bigcap_{k \neq j} Q_k \subseteq Q_j$ pour un certain j, on peut alors retirer Q_j de l'écriture. Quitte à retirer un nombre fini d'idéaux primaires, on peut toujours obtenir une écriture qui satisfait $(\star)$. Donc, sans perte de généralité, supposons que l'écriture (1.2) n'est pas redondante. Soit P un idéal premier contenant I. On a $P \supseteq \sqrt{I} = P_1 \cap \ldots \cap P_n \supseteq P_1 P_2 \ldots P_n$ et donc $P \supseteq P_i$ pour un certain i. Ainsi, si P est une idéal premier minimal au-dessus de I, on doit nécessairement avoir $P = P_j$ pour un certain j. Par conséquent, tous les idéaux premiers minimaux au-dessus de I sont inclus dans $\mathcal{S} = \{P_1, \ldots, P_n\}$. $\square$

Remarque 1.19. En général, il peut y avoir plusieurs écritures non-redondantes pour un même idéal I. Par exemple, posons $A = \mathbb{C}[x, y]$ et $I = (x, y)^2 = (x^2, xy, y^2)$. Alors

(i) $I = I$,

(ii) $I = (x^2, y) \cap (y^2, x)$,

nous donne deux décompositions primaires non-redondantes distinctes de l'idéal primaire I. En particulier, le nombre d'idéaux primaires dans une décomposition primaire non-redondante n'est pas bien défini en général.

Du Théorème 1.18, on obtient immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 1.20. *Soit A un anneau noethérien et $I \subseteq A$ un idéal radical. Alors I admet une* **unique** *écriture de la forme*

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} P_i \quad \textit{et} \quad \bigcap_{k \neq j} P_k \nsubseteq P_j \ \ \textit{pour tout } j,$$

où les P_i sont premiers. Cette écriture est appelée **la** *décomposition primaire de I. Les éléments de $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ (nécessairement distincts) sont appelés les idéaux premiers associés à I. Notons qu'il s'agit exactement des idéaux premiers minimaux au-dessus de I.*

Proposition 1.21. *Soit A un anneau noethérien alors A admet un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.*

Preuve Soit $(0) \subseteq A$ et $\sqrt{(0)} = \bigcap_{i=1}^n P_i$ sa décomposition primaire. Soit P un idéal premier de A minimal. Alors $P \supseteq \sqrt{(0)} = \bigcap_{i=1}^n P_i \supseteq \prod_{i=1}^n P_i$. Il suit qu'il existe un indice i tel que $P \supseteq P_i$. Comme P est minimal, on doit avoir $P = P_i$. $\square$

Remarque 1.22. Cette proposition est aussi une conséquence directe du résultat, plus élémentaire, qui affirme que chaque idéal $I \subseteq A$ contient un produit fini d'idéaux premiers ; ce résultat étant appliqué à $I = (0)$.

Proposition 1.23. *Soit $I \subsetneq A$ un idéal primaire. Alors I n'a qu'un seul idéal premier associé.*

Preuve Comme I est primaire on a que $Q := \sqrt{I}$ est premier. Soit $\sqrt{I} = \bigcap_{i=1}^n P_i$ la décomposition primaire de $\sqrt{I}$. En particulier, pour tout i, on a $Q \subseteq P_i$. Ainsi Q est un premier minimal au-dessus de I. Il doit donc exister un indice j tel que $Q = P_j$. Sans perte de généralité supposons que $Q = P_1$. Finalement, comme l'écriture est non redondante, on doit nécessairement avoir $n = 1$ et $P_1 = Q$. Ainsi, I n'a qu'un seul premier associé. $\square$

Remarque 1.24. Notons que la réciproque est fausse. Par exemple, $I := (xy, y^2) \subseteq \mathbb{C}[x, y]$ est un idéal non-primaire, car $xy \in I$, $y \notin I$ et $x^n \notin I$ pour tout $n \geq 1$. Pourtant $\sqrt{I} = (y)$. Ainsi I n'a qu'un seul premier associé, à savoir, (y).

1.4 Annulateur d'un module

Définition 1.25. Soit M un A-module. On définit l'annulateur de M par $\operatorname{ann}(M) = \{a \in A : aM = 0\}$. Soit $m \in M$ on définit $\operatorname{ann}(m) := \{a \in A : am = 0\}$.

On vérifie aisément que $\operatorname{ann}(M)$ et $\operatorname{ann}(m)$ sont des idéaux de A. Si $M \neq \{0\}$ (resp. $m \neq 0$) alors $\operatorname{ann}(M)$ (resp. $\operatorname{ann}(m)$) est un idéal propre de A.

Exemple 1.26. *Soit $I \subseteq A$ un idéal. Alors $M := A/I$ admet une structure naturelle de A-module. On a $\operatorname{ann}(M) = I$.*

Proposition 1.27. *Soit M un A-module et $I = \operatorname{ann}(M)$.*

(i) Alors pour tout $m \in M$, on a $I \subseteq \operatorname{ann}(m)$.

(ii) Si I est premier et $m \in M \backslash \{0\}$ alors $\operatorname{ann}(m) = I$.

Preuve La preuve du (i) est évidente. Pour le (ii) on sait que $M \simeq A/I$. Soit $\overline{a} = a + I \in A/I$ l'élément correspondant à m via l'isomorphisme. On a toujours que $\operatorname{ann}(\overline{a}) \supseteq I$. Soit $x \in \operatorname{ann}(\overline{a})$. Alors $xa \in I$. Comme I est premier et $a \notin I$ on doit avoir $x \in I$. $\square$

Corollaire 1.28. *Soit $P \subseteq A$ un idéal premier et M un A-module tel que $M \simeq A/P$. Alors tout sous-module cyclique $N \leq M$ est isomorphe à A/P.*

Preuve Ceci résulte directement du (ii) de la Proposition 1.27. $\square$

Remarque 1.29. En particulier, tous les sous A-modules minimaux de A/P sont isomorphes à A/P.

À la Section 2, nous introduirons la notion de premiers associés à un module. La proposition suivante, bien que très simple, est probablement le résultat clé qui explique en grande partie toute l'utilité reliée à la notion de premiers associés.

Proposition 1.30. *Soit M un A-module tel que $M \simeq A/P$ où P est premier. Alors pour tout sous-module non-trivial $N \leq M$, on a que* $\operatorname{ann}(N) = P$.

Preuve Sans perte de généralité, on peut supposer que $N = J/P$ où J est un idéal propre de A. On a clairement que $\operatorname{ann}(N) \supseteq P$. Montrons l'autre inclusion. Soit $a \in J \backslash P$; un tel élément existe, car N n'est pas trivial. Soit $x \in \operatorname{ann}(N)$. Alors $x\overline{a} = \overline{0} \in J/P$, i.e., $xa \in P$. Comme P est premier et $a \notin P$ on doit avoir $x \in P$. Ainsi $\operatorname{ann}(N) = P$. $\square$

Remarque 1.31. Notons que ce résultat devient évident, si l'on voit A/P comme un anneau intègre.

Définition 1.32. Soit M un A-module. On définit

$$\mathcal{DZ}(M) := \{a \in A : \text{il existe } m \in M\backslash\{0\},\ am = 0\}.$$

Les éléments de $\mathcal{DZ}(M) \subseteq A$ sont appelés les diviseurs de zéro **sur** M.

1.5 Quelques notions et résultats supplémentaires

Définition 1.33. Soit A un anneau. On définit

$$\operatorname{Spec}(A) := \{P \subseteq A : P \text{ est un idéal premier}\}.$$

Remarque 1.34. Bien que l'on n'utilisera pas la topologie de Zariski dans ce travail, habituellement on voit $\operatorname{Spec}(A)$ comme un espace topologique via sa topologie naturelle de Zariski.

Définition 1.35. Soit A un anneau et $I, J \subseteq A$ deux idéaux. Alors on dit que I et J sont comparables si $I \subseteq J$ ou $J \subseteq I$. Plus généralement, si $\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ sont des idéaux distincts de A on dit que ces derniers sont comparables si, à une permutation des indices près, on a que $I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_n$. Autrement dit, $\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ est un ensemble totalement ordonné sous l'inclusion. Soit

$$I_0 \subset I_1 \subset \ldots \subset I_n$$

une chaîne d'idéaux distincts. Alors on définit la longueur de cette chaîne comme étant égal à n, i.e., le nombre d'idéaux dans la chaîne moins un.

Définition 1.36. Une paire $(E, \leq)$ telle que E est un ensemble et $\leq$ est une relation d'ordre est appelée un epo (ensemble partiellement ordonné).

Définition 1.37. Soit A un anneau. Soit $I \subseteq A$ un idéal. On définit l'anneau gradué associé à I par

$$\mathrm{gr}_A(I) := \bigoplus_{n \geq 0} I^n / I^{n+1}.$$

Ici $I^0/I = A/I$.

Notons que $\mathrm{gr}_A(I)$ admet une structure naturelle de A/I-algèbre. De plus, si A est noethérien, alors $\mathrm{gr}_A(I)$ est aussi noethérien.

Théorème 1.38. *(Théorème de la base de Hilbert) Soit A un anneau noethérien. Alors $A[T]$ est noethérien.*

Preuve Résultat classique. □

Voici maintenant un lemme fort important.

Lemme 1.39. *(Lemme d'Artin-Rees) Soit A un anneau noethérien et $I, J \subseteq A$ deux idéaux. Alors il existe un entier $n_0 \geq 1$, tel que pour tout $n \geq n_0$, on a*

$$I(I^n \cap J) = I^{n+1} \cap J. \tag{1.3}$$

En itérant (1.3)*, on trouve que $I^m(I^n \cap J) = I^{m+n} \cap J$, si $n \geq n_0$ et $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

Preuve On pose $\widehat{A(I)} := \sum_{n \geq 0} I^n T^n = A[IT]$, il s'agit de "l'algèbre blow-up" de A par rapport à l'idéal I. Remarquons que $\widehat{A(I)} \simeq \bigoplus_{n \geq 1} I^n$ et que $\mathrm{gr}_{\widehat{A(I)}}(I \cdot \widehat{A(I)}) \simeq \mathrm{gr}_A(I)$. Comme A est noethérien il suit que $\widehat{A(I)}$ et $\mathrm{gr}_{\widehat{A(I)}}$ sont noethériens. On pose $J_n := I^n \cap J$ pour $n \geq 0$ et

$$\mathcal{J} := \oplus_{k \geq 0} J_n \subseteq \widehat{A(I)}. \tag{1.4}$$

Notons que $\mathcal{J}$ est un idéal de l'anneau noethérien de l'algèbre blow-up $\widehat{A(I)}$. Ainsi il existe $r \geq 0$ tel que

$$\mathcal{J} = \left(\bigoplus_{k=0}^{r} J_k \right).$$

De plus, par définition de J_n on a $IJ_n \subseteq J_{n+1} = I^{n+1} \cap J$ pour tout $n \geq 0$. L'identité (1.3) revient donc à montrer que $J_{n+1} \subseteq IJ_n$ pour $n \geq n_0$. Soit $n \geq r$ et $x \in J_{n+1}$. Nous allons montrer que $x \in IJ_n$. Comme

$$x \in J_{n+1} = I^{n+1} \cap \left(\bigoplus_{k=0}^{r} J_k \right),$$

en utilisant la structure graduée de $\widehat{A(I)}$, on s'aperçoit qu'il existe des $a_i \in I^i$ et $x_j \in J_j$, avec $j \leq r$, tels que $x = \sum_{i+j=n+1} a_i x_j$. Notons que $i = n+1-j \geq 1$. Comme $a_i = I \cdot I^{i-1}$, il suit que qu'il existe des $a_{ik} \in I$ et $b_k \in I^{i-1}$ tels que $x = \sum_k a_{ik} b_k$. Ainsi

$$x = \sum_{i+j=n+1} \left(\sum_k a_{ik} b_k \right) x_j = \sum_{i,j,k} a_{ik}(b_k x_j).$$

Finalement, remarquons que $b_k x_j \in I^{i-1} J_j \subseteq J_{j+i-1} = J_n$ et donc $x \in I J_n$. $\square$

1.6 Quelques résultats de base sur la localisation

Soit A un anneau. Sauf mention du contraire, un ensemble multiplicativement fermé $S \subseteq A$ contiendra toujours $1 \in S$.

Définition 1.40. Soit A un anneau et S un ensemble multiplicativement fermé. Soit M un A-module. Alors la localisation M par S sera notée par $S^{-1}M$. L'application naturelle $\pi : M \to S^{-1}M$ sera notée par $m \mapsto \frac{m}{1} \in S^{-1}M$.

Proposition 1.41. *Soit A un anneau et $S \subseteq A$ un ensemble multiplicativement fermé et $\pi : A \to S^{-1}A$ l'application naturelle. Si $I \subseteq A$ est un idéal alors on notera par ${}^eI := S^{-1}Af(I)$ l'extension de l'idéal I à $S^{-1}A$. Si $J \subseteq S^{-1}A$, on notera par ${}^cJ := \pi^{-1}(J)$ la contraction de l'idéal J à l'anneau A. On a les résultats suivants :*

(1) Pour tout idéal $J \subseteq S^{-1}A$ on a ${}^e({}^cJ) = J$.

(2) Pour tout idéal I de A on a

$${}^c({}^eI) = \{a \in A : sa \in I \text{ pour un certain } s \in S\} \supseteq I.$$

De plus, ${}^eI = S^{-1}A$ si et seulement si $S \cap I \neq \emptyset$.

(3) On considère les deux epo suivants :

(a) $\mathcal{T} := \{P \in \mathrm{Spec}(A) : P \cap S = \emptyset\}$,

(b) $\overline{\mathcal{T}} := \mathrm{Spec}(S^{-1}A)$.

Pour chacun de ces deux epo la relation d'ordre est donnée par l'inclusion. Alors l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &\to \overline{\mathcal{T}} \\ P &\mapsto {}^eP \\ {}^c\overline{P} &\leftarrow\!\shortmid \overline{P} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'epo.

Preuve La preuve est classique et est laissée au lecteur. $\square$

Proposition 1.42. *Soit M un A-module et S un ensemble multiplicativement fermé. Soit $\pi : M \to S^{-1}M$ l'application naturelle.*

(1) Supposons que M soit de type fini. Alors $S^{-1}\operatorname{ann}_A(M) = \operatorname{ann}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$.

(2) Soit $m \in M$. Alors $S^{-1}\operatorname{ann}_A(m) = \operatorname{ann}_{S^{-1}A}(\frac{m}{1})$.

Preuve Le (2) suit de (1) en posant $M = Am$. Pour le (2) remarquons que trivialement on a $S^{-1}\operatorname{ann}_A(M) \subseteq \operatorname{ann}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$ (toujours vraie même si M n'est pas de type fini). Montrons l'autre inclusion. Posons $\mathfrak{a} = \operatorname{ann}(M)$ et $\overline{\mathfrak{a}} = \operatorname{ann}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$. Par hypothèse il existe des $m_i \in M$ tels que $M = Am_1 + \dots Am_n$. Soit $\frac{x}{s} \in \overline{\mathfrak{a}}$. Alors $\frac{x}{s} \cdot \frac{m_i}{1} = \frac{0}{1}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$. En particulier, il existe des $t_i \in A$ tels que $t_i x m_i = 0$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$. On pose $t = \prod_{i=1}^n t_i$. Ainsi pour tout $m \in M$, on trouve que $txm = 0$. Il suit que $tx \in \operatorname{ann}_A(M) = \mathfrak{a}$ et donc $\frac{x}{s} = \frac{tx}{ts} = \frac{1}{ts}\frac{tx}{1} \in S^{-1}\mathfrak{a} = S^{-1}\operatorname{ann}_A(M)$. $\square$

Définition 1.43. Soit M un A-module et $P \subseteq A$ un idéal premier. Remarquons que (si A n'est pas l'anneau trivial) $1 \in S := A \backslash P$. On définit le localisé de M en P par $M_P := S^{-1}M$.

Proposition 1.44. *Soit A un anneau non-trivial. Soit $J \subseteq P \subseteq A$ des idéaux tels que P est premier. Alors $J_P \subsetneq A_P$.*

Preuve On pose $S := A \backslash P$. On fait une preuve par contradiction. Supposons que $J_P = A_P$. Alors il existe $a \in J$, $s \in S$ tels que $\frac{a}{s} = \frac{1}{1}$. Ainsi il existe $t \in S$ tel que $t(a - s) = 0$. Or on a $t \notin P$ et $(a - s) \notin P$. Ceci contredit la primalité de P. On aurait pu aussi invoquer le (2) de la Proposition 1.41. $\square$

Proposition 1.45. *(fonctorialité de la localisation) Soit A et B deux anneaux. Soit $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux. Soit $S \subseteq A$ et $T \subseteq B$ deux ensembles multiplicativement fermés tels que $f(S) \subseteq T$. Soit $\pi : A \to S^{-1}A$ et $\theta : B \to T^{-1}B$ les deux applications naturelles. On a alors une application naturelle $S^{-1}f : S^{-1}A \to T^{-1}B$ donnée par $f(\frac{a}{s}) := \frac{f(a)}{f(s)}$ qui rend le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & B \arrow[d, "\theta"] \\ S^{-1}A \arrow[r, "S^{-1}f"] & T^{-1}B \end{tikzcd}$$

Preuve Il s'agit d'un calcul direct. $\square$

Proposition 1.46. *Soit A un anneau et $S \subseteq A$ un ensemble multiplicativement fermé. Alors le foncteur $S^{-1}A \otimes_A \_\_$ allant de la catégorie des A-modules vers la catégorie des $S^{-1}A$-modules est exact.*

Preuve Résultat classique. $\square$

Proposition 1.47. *Soit A un anneau noethérien. Soit M un A-module et $I \subseteq A$ un idéal $\mathfrak{m}$-primaire où $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de A. Alors l'application naturelle*

$$M/IM \to M_{\mathfrak{m}}/I_{\mathfrak{m}}M_{\mathfrak{m}}$$

est un isomorphisme de A/I-modules (la structure de A/I-module de $M_{\mathfrak{m}}/I_{\mathfrak{m}}M_{\mathfrak{m}}$ étant induite par la flèche naturelle $A/I \to A_{\mathfrak{m}}/I_{\mathfrak{m}}$).

Preuve Comme la localisation est un foncteur exact, il suffit de montrer que $M/IM \simeq (M/IM)_{\mathfrak{m}}$. Comme A est noethérien, il existe $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tel que $\mathfrak{m}^n \subseteq I$. Ainsi M/IM peut être vu comme un $B := A/\mathfrak{m}^n$-module. Remarquons que B est un anneau local ayant $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} + \mathfrak{m}^n$ comme idéal maximal. On a

$$(M/IM)_{\mathfrak{m}} \simeq (M/IM)_{\overline{\mathfrak{m}}} \simeq S^{-1}(M/IM),$$

où $S := B \backslash \overline{\mathfrak{m}}$. Or, comme B est local, $S = B^{\times}$. Ainsi $S^{-1}(M/IM) = M/IM$. Le résultat suit en observant que les isomorphismes ci-haut sont compatibles avec les structures naturelles de B-modules. $\square$

1.7 Lemme de Nakayama

Proposition 1.48. *Soit M un A-module de type fini et $I \subseteq A$ un idéal tel que $IM = M$. Alors il existe $a \in I$ tel que $(1 + a)M = \{0\}$.*

Preuve preuve classique. $\square$

Corollaire 1.49. *(Lemme de Nakayama : version locale) Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local et M un A-module de type fini. Soit $J \subseteq \mathfrak{m}$ un idéal tel que $JM = M$. Alors $M = \{0\}$.*

Preuve Par la proposition précédente, il existe $a \in J$ tel que $(1 + a)M = \{0\}$. Comme A est un anneau local on a $1 + a \in A^{\times}$ et donc $M = \{0\}$. $\square$

2 Idéaux premiers associés à un module

Définition 2.1. Soit M un A-module de type fini et $P \in \operatorname{Spec}(A)$. On dit que P est un premier associé de M si M contient un sous-module isomorphe à A/P (A-module cyclique).

Remarque 2.2. Notons que P est un premier associé de M si et seulement si P correspond à l'annulateur d'un élément de M.

Définition 2.3. Soit M un A-module. On note $\mathrm{Ass}_A(M)$ (où simplement $\mathrm{Ass}(M)$) l'ensemble des idéaux premiers associés à M.

Proposition 2.4. *Soit M un A-module non-trivial. On pose*

$$\mathcal{S}_M := \{\mathrm{ann}(m) : m \in M\backslash\{0\}\}.$$

Alors $\mathcal{S}_M$ est non-vide et chaque élément maximal de $\mathcal{S}_M$ est un idéal premier.

Preuve Par hypothèse, il existe $m \in M\backslash\{0\}$ et donc $\mathcal{S}_M$ est non-vide. Soit $P \in \mathcal{S}_M$ un élément maximal. Alors il existe $m \in M$ tel que $\mathrm{ann}(m) = P$. Soit $x, y \in A$ tel que $xy \in P$ et $x \notin P$. On va montrer que $y \in P$. Comme $x \notin P$, on a $xm \neq 0$. De plus, $\mathrm{ann}(xm) \supseteq \mathrm{ann}(m) = P$. Comme P est maximal il suit que $\mathrm{ann}(xm) = P$. Comme $(xy)m = y(xm) = 0$ il suit que $y \in P$. $\square$

Corollaire 2.5. *Soit A un anneau noethérien et M un A-module non-trivial. Alors $\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$.*

Preuve En effet, comme M est non-nul, on sait par la première partie de la Proposition 2.4 que $\mathcal{S}_M \neq \emptyset$. Comme A est noethérien, l'ensemble $\mathcal{S}_M \neq \emptyset$ admet au moins un élément maximal, disons $P \in \mathcal{S}_M$. Par la deuxième partie de la Proposition 2.4, P doit être premier et donc $P \in \mathrm{Ass}(M)$. $\square$

Remarque 2.6. Sans l'hypothèse de noethérianité, le Corollaire 2.5 est faux. Par exemple, si l'on prend l'anneau $A := C[0, 1] := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ est une fonction continue}\}$. Alors il n'est pas très dur de montrer que $\mathcal{S}_A$ n'admet pas d'élément maximal.

Remarque 2.7. Le Corollaire 2.5 implique donc que si M est non-trivial alors il existe un $m \in M\backslash\{0\}$ et un $P \in \mathrm{Spec}(A)$ tels que $\mathrm{ann}(m) = P$. Malheureusement, une **construction explicite** de m et P est hors de portée en général. En analysant la preuve précédente, on s'aperçoit que l'existence de m (et donc de P) est une conséquence du lemme de Zorn.

Proposition 2.8. *Soit A un anneau noethérien et Q un idéal tel que $\mathfrak{q} = \sqrt{Q}$ est premier. Soit M un A-module tel que $M \simeq A/Q$. Alors $\mathrm{Ass}(M) = \{\mathfrak{q}\}$.*

Preuve Sans perte de généralité, supposons que $M = A/Q$. Par le Corollaire 2.5 on sait que $\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$. Soit $P \in \mathrm{Ass}(M)$. Alors il existe $a \in A\backslash\{0\}$ tel que $\mathrm{ann}(\overline{a}) = P$ où $\overline{a} := a + Q \in M$. Notons que $\overline{a} \neq \overline{0}$, car $Q \subsetneq A$. Comme $Q \cdot \overline{a} = \overline{0}$, il suit, par définition de P, que $Q \subseteq P$. En prenant le radical de l'égalité précédente, on trouve $\mathfrak{q} \subseteq P$. Montrons l'autre inclusion. On sait que $P \cdot \overline{a} = \overline{0}$ est équivalent à dire que $aP \subseteq Q$. Comme $a \notin Q$ et Q est premier, il suit que $P \subseteq Q$. En prenant le radical on trouve que $P \subseteq \mathfrak{q}$ $\square$

Remarque 2.9. Comme A est noethérien, l'hypothèse $\mathfrak{q} = \sqrt{Q}$ est équivalente à dire que $\mathfrak{q}^n \subseteq Q \subseteq \mathfrak{q}$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Théorème 2.10. *Soit A un anneau noethérien et $P \subseteq A$ un idéal premier minimal. Alors $P \in \mathrm{Ass}(A)$.*

Preuve Soit $(0) = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ une décomposition primaire minimale de (0) avec $P_i = \sqrt{Q_i}$ $(1 \leq i \leq n)$, les premiers associés de (0). On sait que les idéaux premiers minimaux de A sont les P_i. Montrons que P_1 est associé. Posons $J = \bigcap_{i=2}^{n} Q_i$. Alors $J \neq 0$ et $J \cap Q_1 = \{0\}$. En particulier, on a

$$J = \frac{J}{J \cap Q_1} \simeq (J + Q_1)/Q_1 \subseteq A/Q_1.$$

Donc $\mathrm{Ass}(J) \subseteq \mathrm{Ass}(A/Q_1) = \{P_1\}$ où l'égalité précédente est conséquence de la Proposition 2.8. Comme A est noethérien et $J \neq 0$, on sait que $\mathrm{Ass}(J) \neq \emptyset$. Ainsi $\{P_1\} = \mathrm{Ass}(J) \subseteq \mathrm{Ass}(A)$. $\square$

Proposition 2.11. *Soit M un A-module où A est noethérien. Alors* $\mathcal{DZ}(M) = \bigcup_{P \in \mathrm{Ass}(M)} P$.

Preuve Soit $a \in \mathcal{DZ}(M)$. Alors il existe $m_a \in M \backslash \{0\}$ tel que $am_a = 0$. Ainsi $a \in \mathrm{ann}(m_a)$. Par la Proposition 2.4, il existe $P \in \mathrm{Ass}(M)$ tel que $\mathrm{ann}(m_a) \subseteq P$. Ainsi $\mathcal{DZ}(M) \subseteq \bigcup_{P \in \mathrm{Ass}(M)} P$. Réciproquement, soit $a \in P \in \mathrm{Ass}(M)$. Alors il existe $m \in M \backslash \{0\}$ tel que $P = \mathrm{ann}(m)$. En particulier, $am = 0$ et donc $a \in \mathcal{DZ}(M)$. $\square$

Corollaire 2.12. *Soit A un anneau noethérien et $P \subseteq A$ un idéal premier minimal. Alors il existe un $Q \in \mathrm{Ass}(A)$ tel que $P \subseteq Q$. En particulier, $P \subseteq \bigcup_{P_i \in \mathrm{Ass}(A)} P_i$.*

Nous allons donner deux preuves de ce résultat.

Première preuve Ceci est une conséquence directe du Théorème 2.10, car on sait même que $P \in \mathrm{Ass}(A)$.

Deuxième preuve Comme A est noethérien, en vertu de la Proposition 1.4, on sait que chaque idéal $I \subseteq A$ contient un produit fini d'idéaux premiers (on pourrait aussi déduire cette dernière observation du Théorème 1.18). Ainsi il existe des premiers P_i pour $1 \leq i \leq r$ tels que

$$(0) = P_1 P_2 \dots P_r.$$

Parmi toutes les écritures de (0) comme un produit d'idéaux premiers (pas nécessairement distincts), on choisit une écriture avec r minimale. Notons que chaque idéal premier minimal P de A, doit être dans la liste $\{P_1, \dots, P_r\}$. En effet, si P est un premier minimal alors il existe un indice j tel que $P \supseteq P_j$ et donc $P = P_j$, par minimalité. Nous affirmons que si $x \in P_j$ alors nécessairement, $x \in \mathcal{DZ}(A)$. Sans perte de généralité, supposons que $x \in P := P_1$. Comme $P_2 P_3 \dots P_r \neq (0)$ (par la minimalité de r), il existe $y \in P_2 P_3 \dots P_r \backslash \{0\}$. Or $xy \in P_1 P_2 \dots P_r = \{0\}$ et donc $xy = 0$. Ainsi, x est un diviseur de zéro. On a donc $P_1 \subseteq \mathcal{DZ}(A)$. Par la Proposition 2.11, on sait que $\mathcal{DZ}(A) = \bigcup_{P_i \in \mathrm{Ass}(A)} P_i$. Finalement, en utilisant le Lemme 1.2, on trouve qu'il existe i tel que $P \subseteq P_i$. $\square$

Remarque 2.13. Remarquons que la deuxième preuve du Corollaire 2.12 est beaucoup plus élémentaire que la première, car elle n'utilise pas le théorème de la décomposition primaire.

3 Décomposition primaire pour les modules

Soit M un $\mathbb{Z}$-module de type fini. Alors on sait qu'il existe des entiers $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ et $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel que

$$M = \left(\bigoplus_{p|n} M[p^\infty] \right) \oplus M_0, \tag{3.1}$$

où $M_0 \simeq \mathbb{Z}^r$. La décomposition ci-haut est appelée **une** *décomposition primaire de* M. Il s'avère que les facteurs directs $M[p^\infty]$ sont canoniques et pour cette raison, $M[p^\infty]$ est appelé **la** composante p-primaire de M. Par contre, le facteur direct M_0 n'est pas canonique, et pour cette raison M_0 est appelé **une** composante 0-primaire de M. Dans la suite, on aimerait généraliser (3.1) pour les A-modules M de type fini lorsque A est noethérien.

Hypothèse 3.1. *Pour la suite de cette section, sauf mention du contraire, A est un anneau noethérien et M est un A-module de type fini.*

Les idéaux premiers associés prennent toute leur importance grâce à la proposition suivante :

Proposition 3.2. *Soit M un A-module (A noethérien et M de type fini) et $m \in M$. Alors $m = 0$ si et seulement si l'image de m dans M_P est nulle pour tous les P qui sont des éléments maximaux de* $\mathrm{Ass}(M)$.

Preuve Supposons que $m \neq 0$. On considère l'ensemble

$$\mathcal{T} := \{\mathrm{ann}(n) : n \in M \backslash \{0\} \ \text{ et } \ \mathrm{ann}(n) \supseteq \mathrm{ann}(m)\}.$$

Notons que $\mathcal{T}$ est non-vide. Comme A est noethérien, on sait que $\mathcal{T}$ admet un élément maximal, disons $P \in \mathcal{T}$. Par un raisonnement similaire à la Proposition 2.4, on a que P est premier. Comme $P \supseteq \mathrm{ann}(m)$ il suit que $\frac{m}{1} \neq \frac{0}{1}$ dans le module localisé M_P. $\square$

On obtient automatiquement les deux corollaires suivants

Corollaire 3.3. *Soit M un A-module. L'application naturelle*

$$M \to \prod_{\substack{P \in \mathrm{Ass}(M) \\ P \text{ est un élément maximal}}} M_P$$

est une injection.

Corollaire 3.4. *Soit $N \subseteq M$ un sous A-module. Alors N est trivial si et seulement si $N_P = 0$ pour tout $P \in$* $\mathrm{Ass}(M)$.

Pour la suite, on va tenter de mieux comprendre l'ensemble $\mathrm{Ass}(M)$ ainsi que ses éléments maximaux.

Proposition 3.5. *Soit M un A-module. Alors, il existe une suite croissante de sous modules de M, $(M_i)_{0\leq i\leq n}$ avec $M_0 = 0$ et $M_n = M$, telle que pour tout $0 \leq i \leq n-1$, $M_{i+1}/M_i \simeq A/P_i$ pour des $P_i \in \mathrm{Spec}(A)$.*

Preuve Si M est trivial il n'y a rien à montrer. Supposons que M n'est pas trivial. Par le Corollaire 2.5, il existe un sous-module $M_1 \subseteq M$ isomorphe à A/P_1 pour un certain $P_1 \in \mathrm{Spec}(A)$. Si $M_1 \subsetneqq M$, le même argument appliqué à M/M_1, prouve l'existence d'un sous-module M_2 de M contenant strictement M_1 tel que M_2/M_1 soit isomorphe à A/P_2 pour un certain $P_2 \in \mathrm{Spec}(A)$. En continuant ainsi, on construit un suite croissante de sous-modules de M. Comme M est noethérien cette suite doit se terminer, i.e., il doit exister un n tel que $M_n = M$. $\square$

Proposition 3.6. *Soit $S \subseteq A$ un sous-ensemble multiplicativement fermé contenant* 1. *Soit $P \in \mathrm{Spec}(A)$ tel que $P \cap S = \emptyset$. Pour que l'déal premier $S^{-1}P$ de $S^{-1}A$ soit associé à $S^{-1}M$, il est nécessaire et suffisant que P soit associé à M.*

Preuve Supposons que P est associé à M. Il existe alors un élément $m \in M$ tel que $\mathrm{ann}(m) = P$. Nous affirmons que $\mathrm{ann}(\frac{m}{1}) = S^{-1}P$. Clairement, on a $S^{-1}P \subseteq \mathrm{ann}(\frac{m}{1})$. Montrons l'autre inclusion. Soit $\frac{a}{s} \in \mathrm{ann}(\frac{m}{1})$. Alors $\frac{am}{s} = \frac{0}{1} \in S^{-1}M$. Il existe un $t \in S$ tel que $tam = 0$. Ainsi $ta \in P$. Comme $S \cap P = \emptyset$, on a que $t \notin P$. Comme P est premier, on doit avoir $a \in P$ et donc $\frac{a}{s} \in P^{-1}S$.

Inversement, supposons que $Q \in \mathrm{Ass}(S^{-1}A)$. Soit $\pi : A \to S^{-1}A$ la flèche naturelle. Par le (3) de la Proposition 1.41, il existe un unique idéal premier $P := \pi^{-1}(Q) \subseteq A$, disjoint avec S, tel que $S^{-1}P = Q$. Soit $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$ tel que $\mathrm{ann}(\frac{m}{s}) = S^{-1}P$.

On pose $\mathfrak{a} := \mathrm{ann}(m)$. De la Proposition 1.42, on déduit que $S^{-1}\mathfrak{a} = S^{-1}P$. On a donc

$$S^{-1}\mathfrak{a} = S^{-1}P. \tag{3.2}$$

De (3.2) et du fait que P est un idéal de type fini, on tire l'existence d'un $t \in S$ tel que $tP \subseteq \mathfrak{a}$. Nous affirmons que $\mathrm{ann}(tm) = P$. En effet, on a trivialement que $P \subseteq \mathrm{ann}(tm)$. D'autre part, soit $x \in \mathrm{ann}(tm)$. Alors $(xt)m = 0$ et donc $xt \in \mathfrak{a}$. Encore une fois, de (3.2), on tire l'existence d'un $s \in S$ tel que $xts \in P$. Comme $ts \notin P$ et P est premier, il suit que $x \in P$. Ainsi $\mathrm{ann}(tm) = P$ et donc $P \in \mathrm{Ass}(M)$. $\square$

Définition 3.7. Soit $E \subseteq A$ un sous-ensemble. On définit

$$\mathcal{V}(E) := \{P \in \mathrm{Spec}(A) : P \supseteq E\}.$$

Remarque 3.8. Notons que $\mathcal{V}(E) = \mathcal{V}((E))$. Les ensembles $\mathcal{V}(E)$ sont les fermés de $\mathrm{Spec}(A)$ pour la topologie de Zariski.

Définition 3.9. Soit M un A-module. On définit le support de M comme étant

$$\operatorname{Supp}(M) := \{P \in \operatorname{Spec}(A) : M_P \neq 0\}.$$

Proposition 3.10. *Soit M un A-module et $P \subseteq A$ un idéal premier. On a*

$$P \in \operatorname{Supp}(M) \iff M_P \neq 0 \iff P \supseteq \operatorname{ann}(M) \iff P \in \mathcal{V}(\operatorname{ann}(M)).$$

Preuve La première et la dernière équivalence sont des tautologies. Démontrons la deuxième. On passera par la contraposée, i.e., on va montrer que

$$M_P = 0 \iff P \not\supseteq \operatorname{ann}(M).$$

($\Leftarrow$) Supposons que $P \not\supseteq \operatorname{ann}(M)$. Alors il existe $s \in \operatorname{ann}(M) \backslash P$. Ainsi $sM = 0$ et donc $M_P = 0$.

($\Rightarrow$) supposons que $M_P = 0$. Alors on a

$$0 = \operatorname{ann}_{A_P}(M_P) = \operatorname{ann}(M)_P,$$

où la deuxième égalité utilise le fait que M est de type fini. Comme $\operatorname{ann}(M)$ est un idéal de A, la Proposition 1.44 implique que $P \not\supseteq \operatorname{ann}(M)$. $\square$

Remarque 3.11. Il suit de la Proposition 3.10 que $\operatorname{Supp}(M)$ est un fermé de Zariski.

Théorème 3.12. *Soit $(M_i)_{0 \leq i \leq n}$ une suite croissante de sous modules de M avec $M_0 = 0$ et $M_n = M$ telle que pour $1 \leq i \leq n, M_i/M_{i-1}$ est isomorphe à A/P_i avec $P_i \in \operatorname{Spec}(A)$. Alors*

$$\operatorname{Ass}(M) \subseteq \{P_1, \dots, P_n\} \subseteq \operatorname{Supp}(M).$$

De plus, ces trois ensembles ont les mêmes éléments minimaux .

Preuve Nous allons faire la preuve en trois étapes.

(1) Observons que

$$M_P \neq 0 \iff \text{il existe } i \text{ tel que } (A/P_i)_P \neq 0 \iff P \supseteq P_i.$$

Cette observation montre que $\operatorname{Supp}(M) \supseteq \{P_1, \dots, P_n\}$ et que ces deux ensembles ont les mêmes éléments minimaux.

(2) Montrons que $\operatorname{Ass}(M) \subset \{P_1, \dots, P_n\}$. Soit $P \in \operatorname{Ass}(M)$. Le module M contient un sous module cyclique $N = An$, pour un certain $n \in N \backslash \{0\}$, qui est isomorphe à A/P. Soit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ le plus petit indice tel que $N \cap M_i \neq 0$. On a alors les deux injections suivantes

   (i) $N \cap M_i \hookrightarrow N \simeq A/P$,

   (ii) $N \cap M_i \hookrightarrow M_i/M_{i-1} \simeq A/P_i$.

En vertu de la Proposition 1.30, appliquée à (i) et (ii), on trouve que $P = P_i$. Ceci montre donc que $\mathrm{Ass}(M) \subset \{P_1, \ldots, P_n\}$.

(3) Montrons que $\mathrm{Ass}(M)$ et $\mathrm{Supp}(M)$ ont les mêmes éléments minimaux. Supposons que P soit un élément minimal de $\mathrm{Supp}(M)$. Alors $\mathrm{Supp}(M_P) \subseteq \{PA_P\}$. De plus, comme $\mathrm{Ass}(M_P)$ est non vide et contenu dans $\mathrm{Supp}(M_P)$ on a nécessairement $PA_P \in \mathrm{Ass}(M_P)$ et donc $\mathrm{Ass}(M_P) = \{PA_P\}$. Finalement, de la Proposition 3.6, on tire que $P \in \mathrm{Ass}(M)$.

Ceci termine la preuve. $\square$

Corollaire 3.13. $\mathrm{Ass}(M)$ *est de cardinalité finie.*

Remarque 3.14. En général, $\mathrm{Supp}(M)$ peut être de cardinalité infinie. En effet, si $A = \mathbb{Z}$ et $M = \mathbb{Z}$ alors $\mathrm{Ass}(\mathbb{Z}) = \{(0)\}$ et $\mathrm{Supp}(\mathbb{Z}) = \{(p) : p \text{ est premier}\} \cup \{(0)\}$.

Proposition 3.15. *Soit M un A-module et $I \subseteq A$ un idéal. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe un $m \in M\backslash\{0\}$ tel que $Im = 0$.

(ii) Pour tout $x \in I$, il existe un $m_x \in M\backslash\{0\}$ tel que $xm_x = 0$.

(iii) Il existe $P \in \mathrm{Ass}(M)$ tel que $I \subseteq P$.

(iv) I est contenu dans l'union des idéaux de $\mathrm{Ass}(M)$.

Preuve (i) $\Rightarrow$ (ii) Évident.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) : cela résulte de la Proposition 2.4.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) : cela résulte du Lemme 1.2 et du fait que $\mathrm{Ass}(M)$ est fini.

(ii) $\Rightarrow$ (iv) : cela résulte de la Proposition 2.11.

Ceci montre que les quatre propriétés ci-haut sont équivalentes. $\square$

Proposition 3.16. *Soit $x \in A$ et soit $x_M : M \to M$ l'endomorphisme de M défini par x. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) x_M est nilpotent.

(2) x appartient à l'intersection $\displaystyle\bigcap_{P_i \in \mathrm{Ass}(M)} P_i$.

Preuve

(1) $\Rightarrow$ (2) : Supposons que x_M est nilpotent. Soit $P \in \mathrm{Ass}(M)$. On sait que M contient un sous-module isomorphe à A/P. La restriction de l'endomorphisme x_M à ce sous-module est aussi nilpotent. Ainsi, il existe $n \geq$ tel que $x^n \in P$. Comme P est premier, il suit que $x \in P$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Supposons que (2) est vérifiée, et soit $(M_i)_i$ une chaîne croissante de sous-modules de M telle que définie dans le Théorème 3.12. Par définition de cette chaîne et de l'hypothèse que $x \in \cap_{P_i \in \mathrm{Ass}(M)} P_i$ on a $x_M(M_i) \subset M_{i-1}$ pour tout les $i \geq 1$. Il suit que x_M est nilpotent.

Ceci termine la preuve. $\square$

Corollaire 3.17. *Soit* $P \in \mathrm{Spec}(A)$. *Supposons que* $M \neq 0$. *Alors* $\mathrm{Ass}(M) = \{P\}$ *si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) Pour tout $x \in P$*, l'endomorphisme* x_M *est nilpotent.*

(ii) Pour tout $x \in A \backslash P$*, l'endomorphisme* x_M *est injectif.*

Preuve On doit donc montrer

$$\mathrm{Ass}(M) = \{P\} \iff \text{(i) et (ii) sont satisfaits.}$$

($\Rightarrow$) : Comme $\mathrm{Ass}(M) = \{P\}$, la Proposition 3.16 implique directement que (i) est satisfait. Soit $x \in A \backslash P$. Alors par la Proposition 2.11, x n'est pas un diviseur de zéro et donc x_M est injectif.

($\Leftarrow$) : Comme (i) est satisfait, il résulte de la Proposition 3.16 que $P \subseteq \bigcap_{\substack{P_i \in \mathrm{Ass}(M) \\ i \in I}} P_i$. En particulier, pour tout $i \in I$ on a que $P \subseteq P_i$. Supposons qu'il existe un idéal P_i tel que $P_i \neq P$. Dans ce cas, il existe $y \in P_i \backslash P$. On va tenter d'obtenir une contradiction. Par définition de P_i, il existe $m_i \in M \backslash \{0\}$ tel que $Am_i \simeq A/P_i$. Ainsi $ym_i = 0$ et donc y_M n'est pas injectif. Or ceci est absurde, car par hypothèse y_M est injectif. $\square$

Définition 3.18. Soit M un A-module et $N \leq M$ un sous-module. Soit $P \in \mathrm{Spec}(A)$. Alors on dit que N est un sous-module P-primaire de M si $\mathrm{Ass}(M/N) = P$.

Remarque 3.19. Notons que la propriété d'être P-primaire pour un module est une notion relative à un module ambiant. Il ne s'agit donc pas d'une notion absolue.

Théorème 3.20. *On pose* $M = A$ *et* $N = I \subseteq A$ *où* I *un idéal de* A. *Alors* I *est un sous-module* P*-primaire de* A *si et seulement si* I *est un idéal* P*-primaire.*

Preuve ($\Rightarrow$) Supposons que $\mathrm{Ass}(A/I) = \{P\}$. Notons que A/I est un anneau. Du Théorème 2.10 on tire que P est l'unique idéal premier minimal au-dessus de I. Ainsi $\sqrt{I} = P$ et donc I est un idéal P-primaire.

($\Leftarrow$) Supposons que $\sqrt{I} = P$. Alors la Proposition 2.8 implique que $\mathrm{Ass}(M/N) = \{P\}$ et donc N est un sous-module P-primaire de M. $\square$

Proposition 3.21. *Soit* N *un sous-module de* M. *Alors on a :*

$$\mathrm{Ass}(N) \subseteq \mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(N) \cup \mathrm{Ass}(M/N).$$

Preuve L'inclusion $\mathrm{Ass}(N) \subset \mathrm{Ass}(M)$ est claire. Soit $P \in \mathrm{Ass}(M)$ et soit $E \leq M$ un sous-module tel que $E \simeq A/P$. Si $E \cap N = 0$, alors E est isomorphe à un sous-module de M/N et par conséquent P appartient à $\mathrm{Ass}(M/N)$. Supposons que $E \cap N \neq 0$. Alors on peut choisir un élément non nul $x \in E \cap N$. Notons que le sous-module Ax est isomorphe à A/P (ceci découle du (ii) de la Proposition 1.27). Ainsi $P \in \mathrm{Ass}(N)$. Cela montre que $\mathrm{Ass}(M)$ est contenu dans $\mathrm{Ass}(N) \cup \mathrm{Ass}(M/N)$. $\square$

Proposition 3.22. *Il existe une injection*

$$\varphi : M \longrightarrow \prod_{P \in \mathrm{Ass}(M)} E(P) \tag{3.3}$$

où, pour tout $P \in \mathrm{Ass}(M)$, $E(P)$ est un A-module tel que $\mathrm{Ass}(E(P)) = \{P\}$ (la construction des $E(P)$ sera donnée dans la preuve).

Remarque 3.23. Notons que le produit cartésien dans (3.3) n'est rien d'autre qu'une somme directe, car $\mathrm{Ass}(M)$ est de cardinalité finie en vertu du Théorème 3.12.

Preuve Pour tout $P \in \mathrm{Ass}(M)$ on choisit (arbitrairement) un sous-module $Q(P)$ de M tel que $P \notin \mathrm{Ass}(Q(P))$ et tel que $Q(P)$ est maximal par rapport à cette propriété. Notons qu'un tel module $Q(P)$ existe toujours, car M est noethérien (cependant $Q(P)$ n'est pas unique en général). En particulier, on a $Q(P) \neq M$.

On pose $E(P) := M/Q(P)$. Grâce au Corollaire 2.5 on tire que $\mathrm{Ass}(E(P)) \neq \emptyset$. On va maintenant montrer que $\mathrm{Ass}(E(P)) \subseteq \{P\}$ ce qui impliquera que $\mathrm{Ass}(E(P)) = \{P\}$. En particulier, ceci montre que $Q(P)$ est un sous-modules P-primaire de M.

Montrons que $\mathrm{Ass}(E(P)) \subseteq \{P\}$. Soit $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$ tel que $\mathfrak{q} \neq P$. Nous affirmons que $E(P)$ ne peut contenir un sous-module $M'/Q(P) \leq E(P)$ isomorphe à $A/\mathfrak{q}$. En effet, sinon par la Proposition 3.21, on aurait que $\mathrm{Ass}(M') \subseteq \mathrm{Ass}(M'/Q(P)) \cup \mathrm{Ass}(Q(P)) = \{\mathfrak{q}\} \cup \mathrm{Ass}(Q(P))$ et donc $P \notin \mathrm{Ass}(M')$. Or M' est strictement plus grand que $Q(P)$, ce qui est une contradiction.

Finalement, il reste à montrer que φ est injective. Posons $N := \bigcap_{P \in \mathrm{Ass}(M)} Q(P)$. Alors, encore une fois, par la Proposition 3.21, on a que $\mathrm{Ass}(N) \subseteq \mathrm{Ass}(Q(P))$ pour tout $P \in \mathrm{Ass}(M)$. Ainsi $\mathrm{Ass}(N) = \emptyset$ et donc, par la Corollaire 2.5, on obtient que $N = 0$. Il suit que φ est injective. $\square$

Corollaire 3.24. *Soit M un A-module et soit $Q(P) \subseteq M$ (pour $P \in \mathrm{Ass}(M)$) les sous-modules Q-primaires apparaissant dans la preuve ci-haut. Alors $\bigcap\limits_{P \in \mathrm{Ass}(M)} Q(P) = \{0\}$.*

Théorème 3.25. *Tout sous-module N de M peut être écrit comme intersection*

$$N = \bigcap_{P \in \mathrm{Ass}(M/N)} \widetilde{Q}(P), \tag{3.4}$$

où $\widetilde{Q}(P) \subseteq M$ est un sous-module P-primaire de M.

Remarque 3.26. Quitte à retirer certains modules $\widetilde{Q}(P)$ dans l'intersection ci-haut, on peut supposer qu'une telle écriture est non-redondante.

Preuve On pose $\overline{M} := M/N$ et on considère $\pi : M \to \overline{M}$ la projection canonique. Si on applique la construction apparaissant de la preuve de la Proposition 3.22 au module $\overline{M}$, on trouve des sous-modules $\overline{Q}(P) \leq \overline{M}$ qui sont P primaires pour $P \in \mathrm{Ass}(\overline{M})$. Du Corollaire 3.24, on trouve que

$$\bigcap_{P \in \mathrm{Ass}(\overline{M})} \overline{Q}(P) = \overline{0}. \tag{3.5}$$

On pose $\widetilde{Q}(P) := \pi^{-1}(\overline{Q}(P)) \leq M$. Par le théroème de la correspondance pour les modules quotients on sait que $M/\widetilde{Q}(P) \simeq \overline{M}/\overline{Q}(P)$. Ainsi $\widetilde{Q}(P)$ est un sous-module P-primaire de M. Finalement, en appliquant π^{-1} à (3.24) on trouve

$$\bigcap_{P \in \mathrm{Ass}(\overline{M})} \widetilde{Q}(P) = N.$$

Le résultat suit. $\square$

Soit M un A-module. En général, les sous-module P-primaires $Q(P)$ de M apparaissant dans la preuve de la Proposition 3.22 ne sont pas uniques. Cependant, on a le résultat suivant :

Proposition 3.27. *Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ un élément minimal et soit $Q(\mathfrak{p})$ le module apparaissant dans la preuve de la Proposition 3.22. Alors $Q(\mathfrak{p}) = \ker(M \xrightarrow{\theta} M_{\mathfrak{p}})$. Ici θ correspond à la flèche naturelle.*

Preuve Nous affirmons que $Q(\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} = 0$. En effet, si $Q(\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} \neq 0$ alors on sait que $\mathrm{Ass}(Q(\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}}) \neq \emptyset$. D'autre part, par définition de $Q(\mathfrak{p})$, on a $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ass}(Q(\mathfrak{p}))$ et donc, en vertu de la Proposition 3.6, on a $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \notin \mathrm{Ass}(Q(\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}})$. Ainsi, il doit exister un $\mathfrak{p}' \subsetneqq \mathfrak{p}$ tel que $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Ass}(Q(\mathfrak{p}))$. Or $\mathrm{Ass}(Q(\mathfrak{p})) \subseteq \mathrm{Ass}(M)$. Ce qui est absurde, car $\mathfrak{p}$ était un élément minimal de $\mathrm{Ass}(M)$. Ceci montre donc que $Q(\mathfrak{p}) \subseteq \ker(\theta)$. Montrons l'autre inclusion. Posons $Q' = \ker(\theta)$. Nous affirmons que $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ass}(Q')$. Sinon, il existerait $m \in Q'$ tel que $Am \simeq A/\mathfrak{p}$. Ainsi, après localisation, on aurait $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \simeq A_{\mathfrak{p}} \cdot \frac{m}{1} = A_{\mathfrak{p}} \cdot \theta(Am) = 0$; ce qui est absurde. Finalement, comme $Q(\mathfrak{p})$ est maximal par rapport à la propriété que $\mathfrak{p} \notin Q(\mathfrak{p})$ et que $Q(\mathfrak{p}) \subseteq Q'$ on doit conclure que $Q(\mathfrak{p}) = Q'$. $\square$

4 Notions de dimension

4.1 Les invariants $\dim(A)$, $e(A)$ et $s(A)$

Définition 4.1. Soit A un anneau. On considère l'ensemble des chaînes d'idéaux premiers de longueur finie de A à savoir

$$\mathcal{S} := \{\mathcal{C} := \{P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n\} : \text{les } P_i \subset A \text{ sont des idéaux premiers}, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

On notera la longueur d'une chaîne par $\ell(\mathcal{C})$. On définit la dimension de Krull de A comme étant

$$\dim(A) = \dim_{\text{Krull}}(A) := \sup\{\ell(\mathcal{C}) : \mathcal{C} \in \mathcal{S}\}.$$

Exemple 4.2. *(i) Pour un corps, et plus généralment pour un anneau artinien A, on a* $\dim(A) = 0$.

(ii) Pour un domaine A, si $B = A[\{T_n\}_{n\geq 1}]$, alors $\dim(B) = \infty$, *car dans ce cas on peut considérer la chaîne infinie d'idéaux premiers suivante :*

$$(0) \subset (T_1) \subset (T_2) \subset \ldots, \subset (T_1, \ldots, T_n) \subset \ldots.$$

(iii) $\dim(\mathbb{Z}) = 1$

Remarque 4.3. (1) Pour tout idéal I de A on a : $\dim(R/I) = \dim(R/\sqrt{I})$ et $\dim(A/I) \leq \dim(A)$.

(2) Pour un domaine A , si $A = R[T_1, \ldots, T_n]$, alors $\dim(A) \geq n$, car dans ce cas on peut considérer la chaîne d'idéaux premiers suivante :

$$(0) \subset (T_1) \subset (T_2) \subset \ldots, \subset (T_1, \ldots, T_n).$$

(3) Soit $S \subseteq A$ un ensemble multiplicativement fermé. Les idéaux premiers dans $S^{-1}A$ correspondent aux idéaux premiers dans A disjoints de S. Par conséquent, $\dim(S^{-1}A) \leq \dim(A)$ pour tout S.

Définition 4.4. Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local. On pose $\kappa(\mathfrak{m}) := A/\mathfrak{m}$ pour le corps résiduel de A.

Notons que $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$, pour tout $n \geq 0$, peut être vu comme un espace vectoriel sur $\kappa(\mathfrak{m})$.

Définition 4.5. On définit la dimension de plongement (embedding dimension) de A comme étant

$$e(A) := \dim_{\kappa(\mathfrak{m})}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2).$$

Remarque 4.6. En géométrie algébrique, on interprète $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ comme étant l'espace tangent de $\mathrm{Spec}(A)$ au voisinage du point fermé $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$.

On rappelle le résultat classique suivant

Théorème 4.7. *Un anneau A est dit artinien s'il satisfait l'une des deux conditions équivalentes suivantes :*

(i) A est de longueur finie en tant que A-module (pour un rappel sur la notion de longueur on renvoit à la Définition 4.22).

(ii) A est noethérien et chaque idéal premier de A est maximal.

De plus, si $\mathfrak{r}$ dénote le radical de A, alors $\mathfrak{r}$ est nilpotent et $A/\mathfrak{r}$ est un produit cartésien fini de corps.

Proposition 4.8. *Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau noethérien local et $I \subseteq A$ un idéal. Alors A/I est artinien si et seulement si $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$.*

Preuve ($\Leftarrow$) Supposons que $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$. Comme A est noethérien il existe $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tel que $\mathfrak{m}^n \subseteq I$. Ainsi on a une surjection $A/\mathfrak{m}^n \to A/I$. On va montrer que $\overline{A} := A/\mathfrak{m}^n$ est artinien. Soit $\overline{P} = P + \mathfrak{m}^n \subseteq \overline{A}$ un idéal premier. Alors $P \supseteq \mathfrak{m}^n$. Comme P est premier, on doit avoir $P \supseteq \mathfrak{m}$. Comme $\mathfrak{m}$ est maximal il suit que $P = \mathfrak{m}$. Ainsi $\overline{P}$ est un idéal maximal (l'unique en fait) de $\overline{A}$. Il suit que $\overline{A}$ est artinien.

($\Rightarrow$) Supposons que A/I est artinien. Soit $P \subseteq A$ un idéal premier tel $P \supseteq I$. Alors comme A est artinien on doit avoir P est maximal. Comme A est local on doit avoir $P = \mathfrak{m}$. Comme $\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{P \text{ premier} \\ P \supseteq I}} P$ il suit que $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$. (Notons que nous n'avons pas utilisé le fait que A est noethérien pour cette direction). Le résultat suit. $\square$

Corollaire 4.9. *Soit A un anneau noethérien local. Alors il existe un nombre fini d'éléments $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathfrak{m}$ tel que $A/(x_1, \ldots, x_n)$ est artinien.*

Définition 4.10. Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local. On définit la dimension de Chevalley comme étant

$$s(A) := \min\{n : \exists x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{m}, A/(x_1, \ldots, x_n) \text{ est artinien}\}.$$

Notons que $s(A)$ est bien définie en vertu du Corollaire 4.9.

Remarque 4.11. Notons que par définition, $s(A) \leq e(A)$.

À la Section 5 nous comparerons les invariants $e(A), s(A)$ et $\dim(A)$ lorsque A est un anneau noethérien local.

4.2 Polynômes à valeurs entières et les $\mathbb{Z}$-polynômes

Dans cette sous-section, nous allons étudier les polynômes à coefficients rationnels $f \in \mathbb{Q}[x]$ tels que $f(n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ces polynômes apparaissent naturellement lorsque l'on considère les modules gradués $M = \bigoplus_{i \geq 0} M_i$ de type fini sur un anneau polynomial $A = k[x_1, \ldots, x_r]$ où k est un corps. Hilbert a découvert que la fonction $n \mapsto \dim_k(M_n)$ (pour n assez grand) correspond à un polynôme à coefficients rationnels.

Définition 4.12. Les polynômes binomiaux $Q_n(x)$ pour $n = 0, 1, \ldots, k, \ldots$ sont définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= 1 \\ Q_1(x) &= x \\ &\vdots \\ Q_k(x) &= \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ces polynômes forment une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}[x]$. La propriété remarquable de ces polynômes (qui ont des coefficients rationnels et non entiers) est que pour tout $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $Q_k(n) \in \mathbb{Z}$.

Définition 4.13. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction. On définit **l'opérateur différence**, appliqué à f, par

$$(\Delta f)(x) := f(x+1) - f(x),$$

pour tout $x \in \mathbb{C}$.

On peut voir Δ comme un opérateur $\mathbb{C}$-linéaire sur $\mathbb{C}[x]$. Comme un polynôme non-constant ne peut être une fonction périodique, il suit que $\ker(\Delta) = \{\text{polynômes constants}\}$. Un calcul direct montre que

$$\Delta Q_k(x) = Q_{k-1}(x),$$

pour tout $k \geq 1$.

Lemme 4.14. *Soit $f \in \mathbb{Q}[x]$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $f(x)$ est une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire des Q_k.

(b) On a $f(n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(c) On a $f(n) \in \mathbb{Z}$ pour tout n suffisamment grand.

(d) Δf a la propriété (a) et il existe au moins un entier n tel que $f(n) \in \mathbb{Z}$.

Preuve Let implication (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) et (a) $\Rightarrow$ (d) sont claires.

(d) $\Rightarrow$ (a) : Si (d) est vraie alors $\Delta f = \sum e_k Q_k$ pour des $e_k \in \mathbb{Z}$. Donc $f = \sum e_k Q_{k+1} + e_0$ pour $e_0 \in \mathbb{Q}$. De plus, comme il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $f(n_0) \in \mathbb{Z}$ il suit que $e_0 = f(n_0) - \sum e_k Q_{k+1}(n_0) \in \mathbb{Z}$.

(c) $\Rightarrow$ (a) : On fait une induction sur le degré de f. Si $\deg(f) = 0$, alors a certainement que (c) $\Rightarrow$ (a). Maintenant, en appliquant l'hypothèse d'induction à Δf ($\deg \Delta f < \deg f$), on voit que Δf a la propriété (a) ; finalement en appliquant la propriété (d) on obtient (a). $\square$

Corollaire 4.15. *Soit $f \in \mathbb{Q}[x]$ un polynôme tel que $f(n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ suffisamment grand. Alors il existe un polynôme $F[x] \in \mathbb{Q}[x]$ tel que $\Delta F = f$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $F(n) \in \mathbb{Z}$.*

Preuve Par le Lemme 4.14, il existe des $e_k \in \mathbb{Z}$ tels que $f = \sum e_k Q_k$. On pose $F = \sum e_k Q_{k+1}$. Alors $\Delta F = f$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $F(n) \in \mathbb{Z}$. $\square$

Définition 4.16. Un polynôme satisfaisant l'une des propriétés du Lemme 4.14 est appelé un polynôme à valeurs entières. Si $f \in \mathbb{Q}[x]$ on notera par $e_k(f) = e_k \in \mathbb{Q}$ le coefficient de Q_k dans la décomposition

$$f = \sum e_k Q_k. \tag{4.1}$$

Si $k > 0$, en appliquant Δ à (4.1), on trouve la relation $e_k(f) = e_{k-1}(\Delta(f))$. En particulier, si $\deg(f) \leq k$, $e_k(f)$ est égal au polynôme constant $\Delta^k(f)$, et on a

$$f(x) = e_k(f)\frac{x^k}{k!} + g(x),$$

avec $\deg(g(x)) < k$. Notons de plus que si $\deg(f) = k$ alors

$$f(n) \sim e_k(f)\frac{n^k}{k!} \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Ainsi on a l'équivalence suivante :

$$e_k(f) > 0 \Longleftrightarrow f(n) > 0 \text{ pour tout les } n \text{ suffisamment grand.}$$

Définition 4.17. Soit $f : D \to \mathbb{Z}$ une fonction à valeurs entière définie sur $D = \mathbb{Z}$ ou sur une demi-droite positive, i.e., $D = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0\}$ pour un certain $n_0 \in \mathbb{Z}$. Alors on dira que f est $\mathbb{Z}$-polynômiale (ou f est un $\mathbb{Z}$-polynôme) si il existe un polynôme $P_f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tel que $f(n) = P_f(n)$ si n est **suffisamment grand**.

Comme un polynôme non-nul n'a qu'un nombre fini de zéros, il suit que $P_f(x)$ est uniquement déterminé par f. De plus, le Lemme 4.14 implique que $P_f(n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Remarque 4.18. Remarquons aussi que la classe des fonctions $\mathbb{Z}$-polynômiales est strictement plus grande que la classe des polynômes à valeurs entières.

Le lemme suivant nous donne une caractérisation intéressante des fonctions $\mathbb{Z}$-polynomiales.

Lemme 4.19. *Soit $f : D \to \mathbb{Z}$ une fonction où $D = \mathbb{Z}$ ou $D = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0\}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) f est $\mathbb{Z}$-polynômiale.

(2) Δf est $\mathbb{Z}$-polynômiale.

(3) Il existe $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel que $\Delta^r f(n) = 0$ pour tout n suffisamment grand.

Preuve (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) sont claires. Supposons que (2) est vraie. Alors le polynôme $P_{\Delta f}(x)$ est bien défini. Par le Corollaire 4.15, il existe un polynôme $R \in \mathbb{Q}[x]$ à valeurs entières tel que $\Delta R = P_{\Delta f}$. La fonction $g : n \mapsto f(n) - R(n)$ est telle que $\Delta g(n) = 0$ pour n suffisamment grand. Ainsi g prend la valeur constante e_0 pour n suffisamment grand. On a donc $f(n) = R(n) + e_0$ pour n suffisamment grand. Ceci montre donc que f est un $\mathbb{Z}$-polynôme.

Définition 4.20. Soit f un $\mathbb{Z}$-polynôme ayant pour polynôme associé P_f. On dira que f est de degré k si P_f est de degré k. On définit $e_k(f) := e_k(P_f)$.

4.3 Polynômes de Hilbert-Samuel et l'invariant $\delta(A)$

On rappelle la proposition classique suivante :

Proposition 4.21. *Soit A un anneau. Soit M un A-module. Alors M admet une suite de composition si et seulement si M est artinien et noethérien. De plus, supposons que M admette une suite de composition*

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \ldots \supset M_n = \{0\},$$

de longueur n. Alors chaque chaîne de sous-modules de M a une longueur $\leq n$, et elle peut être raffinée (de plusieurs manières différentes en général) en une suite de composition. De plus, si on considère la suite exacte courte de A-modules suivante :

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

Alors M est de longueur finie si et seulement si L et N sont de longueur finie. De plus, $\ell(L) + \ell(N) = \ell(M)$ (la longueur est additive sur les suites exactes courtes).

Définition 4.22. Soit M un A-module artinien et noethérien. Alors on définit $\ell_A(M) := \ell(M)$ comme la longueur d'une suite de composition de M.

En vertu de la Proposition 4.21, $\ell_A(M)$ est bien définie.

Hypothèse 4.23. *Pour la suite de cette sous-section, on supposera que* $(A, \mathfrak{m})$ *est un anneau local.*

Pour le reste de cette sous-section on va montrer le théorème suivant :

Théorème 4.24. *Soit* $(A, \mathfrak{m})$ *un anneau local noethérien. Alors il existe un polynôme* $\chi_{\mathfrak{m}}(T) \in \mathbb{Q}[T]$*, appelé le polynôme de Hilbert-Samuel de* A *qui satisfait les deux propriétés suivantes :*

(i) $\chi_{\mathfrak{m}}(n) = \ell_A(A/\mathfrak{m}^n)$ *pour tout* n *suffisamment grand.*

(ii) $\deg(\chi_{\mathfrak{m}}(T)) \leq r$*,*

où $r = e(A)$ *(la dimension de plongement).*

Notons que la longueur de $\overline{A} := A/\mathfrak{m}^n$ est finie, car $\overline{A}$ est un anneau artinien (donc aussi noethérien et par conséquent de longueur finie).

Définition 4.25. Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien. On définit la dimension de Hilbert-Samuel comme étant $\delta(A) := \deg(\chi_{\mathfrak{m}}(T))$.

Remarque 4.26. Notons que si $I \subseteq A$ est un idéal alors $\delta(A) \geq \delta(A/I)$.

Afin de montrer le Théorème 4.24 on aura besoin de la proposition suivante :

Proposition 4.27. *Soit* $A = \oplus_{i \geq 0} A_i$ *un anneau noethérien gradué sur un corps* $k = A_0$*. Supposons que* A *est engendré, en tant que* k*-algèbre, par* $\{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq A_1$*. Soit* $M = \oplus_{i \geq 0} M_i$ *un* A*-module noethérien et gradué. Alors l'application* $f_M : \mathbb{Z}_{\geq 0} \mapsto \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *donnée par* $n \mapsto f_M(n) := \dim_k M_n$ *est une fonction* $\mathbb{Z}$*-polynomiale de degré au plus* $r - 1$*.*

Par convention, on définira le degré du polynôme constant 0 par -1.

Définition 4.28. Le $\mathbb{Z}$-polynôme f_M apparaissant dans la Proposition 4.27 est habituellement appelé le polynôme de Hilbert associé au A-module gradué M.

Preuve de la Proposition 4.27. Premièrement, remarquons que $\dim_k M_n < \infty$ pour tout n. En effet, il existe $m_1, \ldots, m_n \in M$ tels que

$$M = \sum_{i=1}^{n} k[x_1, \ldots, x_r] m_i.$$

Quitte à redécomposer chaque m_i comme une somme finie d'éléments homogènes, on peut supposer que les m_i sont homogènes. Comme les x_i sont homogènes de degré 1 il suit que $\dim_k(M_i) < \infty$. Ainsi la fonction f_M a un sens. Si $r = 0$ alors $A = A_0 = k$ et $M_n = \{0\}$ pour $n \gg 0$. Par conséquent, f_M est le polynôme zéro de degré -1, ce qui démontre le résultat. Soit $s \geq 1$. Supposons que la Proposition soit vraie lorsque la valeur de r est telle que $r \leq s-1$. On va montrer qu'elle est vraie pour $r = s$. Par hypothèse, A est engendrée par $\{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq A_1$ sur k. On considère l'homomorphisme $\lambda : M \to M$ donné par $m \mapsto x_r z$. Notons que λ est un homomorphisme de A-modules graduée de degré 1. Ainsi $K := \ker(\lambda)$ et $C := \operatorname{coker}(\lambda)$ sont naturellement gradués. En particulier, on a la suite exacte de k-espaces vectoriels

$$0 \to K_n \to M_n \xrightarrow{\lambda} M_{n+1} \to C_{n+1} \to 0$$

De cette suite exacte, on tire la relation $f_K(n) - f_M(n) + f_M(n+1) - f_C(n+1) = 0$ pour tout $n \geq 0$. Autrement dit, on a $\Delta(f_M)(n) = f_C(n+1) - f_K(n)$ pour tout $n \geq 0$. Comme la multiplication par x_r tue les modules K et C, ces derniers sont gradués sur l'anneau quotient $\overline{A} = A/(x_r)$. Comme $\overline{A}$ est gradué et générée par au plus $s-1$ éléments alors, par induction, les polynômes f_C et f_K sont $\mathbb{Z}$-polynomiaux de degré au plus $s-2$. Ainsi $\Delta(f_M)$ est $\mathbb{Z}$-polynomiale de degré au plus $s-2$. Comme f_M est à valeurs entière, on peut appliquer le Lemme 4.19 à f_M. On trouve donc que f_M est $\mathbb{Z}$-polynomiale de degré au plus $s-1$. $\square$

Preuve du Théorème 4.24 On pose $\overline{x}_i := x_i + \mathfrak{m}^2$ pour $i = 1, \ldots, r$. Ainsi $\mathrm{gr}_A(\mathfrak{m}) = k[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_r]$. Remarquons que $\mathrm{gr}_A(\mathfrak{m})$ est une k-algèbre graduée qui peut être vue comme un quotient de l'anneau polynomial $B := k[T_1, \ldots, T_r]$ via l'homomorphisme surjectif gradué $T_i \mapsto \overline{x}_i$. Posons K comme étant le noyau de cet homomorphisme. Ainsi $K = \oplus_{i \geq 0} K_i$ est un idéal gradué de B. Les composantes homogènes B_n de B sont des k-espace vectoriels de dimension $\binom{n+r-1}{r-1}$. Considérons l'idéal maximal $M = (T_1, \ldots, T_r) \subseteq B$. Alors l'application naturelle $B_n \to M^n/M^{n+1}$ est un isomorphisme de k-espaces vectoriels. Ainsi on a

$$B = \bigoplus_{n \geq 0} B_n = \bigoplus_{n \geq 0} M^n/M^{n+1}.$$

On a donc la suite exacte courte

$$0 \to K_n \to B_n \to \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \to 0$$

De cette suite on tire que

$$\dim_k(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) = \binom{n+r-1}{r-1} - \dim_k(K_n). \tag{4.2}$$

On peut voir K comme un B-module gradué de type fini. Comme B est noethérien, il suit que K est un B-module gradué noethérien. Ainsi, grâce à la Proposition 4.27, on trouve que la fonction $n \mapsto \dim_k(K_n)$ est $\mathbb{Z}$-polynomiale de degré au plus $r-1$. Comme l'application $n \mapsto \binom{n+r-1}{r-1}$ est $\mathbb{Z}$-polynomiale de degré r il suit que l'application $n \mapsto \dim_k \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ est $\mathbb{Z}$-polynômiale. De plus, on a

$$\dim_k(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) = \ell_A(A/\mathfrak{m}^{n+1}) - \ell_A(A/\mathfrak{m}^n) = \Delta(\chi_{\mathfrak{m}})(n+1). \tag{4.3}$$

Ainsi la fonction $n \mapsto \Delta(\chi_{\mathfrak{m}})(n)$ est $\mathbb{Z}$-polynômiale de degré au plus $r-1$. Finalement, par le Lemme 4.19, on obtient que l'application $n \mapsto \chi_{\mathfrak{m}}(n)$ est $\mathbb{Z}$-polynômiale de degré au plus r. $\square$

Corollaire 4.29. *Soit* $(A, \mathfrak{m})$ *un anneau local noethérien. Soit* $\mathfrak{q} \subseteq A$ *un idéal* $\mathfrak{m}$*-primaire tel* $\mathfrak{q}$ *peut être engendré par* s *éléments. On pose pose* $\chi_{\mathfrak{q}}(n) := \ell_A(A/\mathfrak{q}^n)$*. Alors* $\chi_{\mathfrak{q}}(n)$ *est une fonction* $\mathbb{Z}$*-polynômiale de degré* $\delta(A) \leq s$*. En particulier,* $\deg(\chi_{\mathfrak{q}}(T)) = \deg(\chi_{\mathfrak{m}}(T))$ *et donc le degré* $\deg(\chi_{\mathfrak{q}}(T))$ *est indépendant de* $\mathfrak{q}$*.*

Preuve Notons que $\mathrm{gr}_A(\mathfrak{q}) = \oplus_{n\geq 0}\, \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}$ est gradué et noethérien. De plus, comme $\mathfrak{q}$ peut être engendré par s éléments, alors $\mathrm{gr}_A(\mathfrak{q})$ peut être engendré sur $\overline{A} := A/\mathfrak{q}$ par s éléments de degré 1. Comme les idéaux $\mathfrak{q}^n$ sont de type fini, $\mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}$ est un $\overline{A} := A/\mathfrak{q}$-module de type fini. Comme $\overline{A}$ est artinien, il suit que la longueur de $\mathfrak{q}^m/\mathfrak{q}^n$ ($m \leq n$), en tant que $\overline{A}$-module, est finie. Un argument similaire à la preuve précédente (la longueur est additive sur une suite exacte courte) montre que

$$n \mapsto \ell_A(\mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}) = \chi_{\mathfrak{q}}(n+1) - \chi_{\mathfrak{q}}(n),$$

est une fonction polynômiale de degré au plus s. Comme $\mathfrak{m}^r \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}$ pour un certain $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, on a $\mathfrak{m}^{nr} \subseteq \mathfrak{q}^n \subseteq \mathfrak{m}^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Ainsi

$$\chi_{\mathfrak{m}}(n) \leq \chi_{\mathfrak{q}}(n) \leq \chi_{\mathfrak{m}}(rn),$$

pour tout n suffisamment grand. Ainsi $\chi_{\mathfrak{m}}(T)$ et $\chi_{\mathfrak{q}}(T)$ sont des polynômes de même degré et $\deg(\chi_{\mathfrak{m}}(T)) = \deg(\chi_{\mathfrak{q}}(T)) \leq s$. $\square$

Proposition 4.30. *Soit* $(A, \mathfrak{m})$ *un anneau local noethérien. On pose* $B := \mathrm{gr}_A(\mathfrak{m})$ *et* $C := B_{\mathcal{M}}$ *(le localisé de* B *par rapport à l'idéal maximal* $\mathcal{M}$*) où* $\mathcal{M} = \bigoplus_{k\geq 1} B_k \subseteq B$ *est "l'idéal irrelevant". Alors* A *et* C *ont les mêmes polynômes de Hilbert-Samuel.*

Preuve Notons que B n'est pas un anneau local en général, ainsi son polynôme de Hilbert-Samuel n'a pas de sens a priori. Cependant, C est un anneau local, car il s'agit du localisé de B par rapport à l'idéal premier $\mathcal{M}$ (en fait $\mathcal{M}$ est même un idéal maximal de B). En vertu du la Proposition 1.47, on trouve que

$$\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \simeq \mathcal{M}^n/\mathcal{M}^{n+1} \quad \text{(un isomorphisme de } A/\mathfrak{m}\text{-modules).} \tag{4.4}$$

Il suit de (4.4) que les polynômes de Hilbert-Samuel de A et C sont les mêmes.

5 Comparaison des différentes notions de dimension

5.1 Hauteur et cohauteur d'un idéal

Définition 5.1. Soit P un idéal premier d'un anneau A. La hauteur de P est définie comme étant le supremum des longueurs de chaînes d'idéaux premiers de A contenus dans P et est notée par $\mathrm{ht}(P)$. Ainsi

$$\mathrm{ht}(P) = \mathrm{Sup}\{n : \exists P_i \in \mathrm{Spec}(A), 0 \leq i \leq n, P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n = P\}.$$

Plus généralement, la hauteur d'un idéal $I \subseteq A$ est définie comme étant l'infimum des hauteurs de tous les idéaux premiers contenant I et est notée par $\mathrm{ht}(I)$.

Définition 5.2. Soit I un idéal de A. La cohauteur de I est définie comme étant le supremum des longueurs de chaînes d'idéaux premiers de A contenant I et est notée par $\mathrm{coht}(I)$. Ainsi on a

$$\mathrm{coht}(I) = \mathrm{Sup}\{n | \exists P_i \in \mathrm{Spec}(A), 0 \leq i \leq n, I \subseteq P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n\}.$$

Remarque 5.3. Soit A un anneau et $P \subseteq A$ un idéal premier. On vérifie aisément que

(1) $\mathrm{ht}(P) = \dim_K(A_P)$.

(2) $\mathrm{coht}(P) = \dim_K(A/P)$.

(3) $\mathrm{ht}(P) + \mathrm{coht}(P) \leq \dim_K(A)$.

Dans le cadre algébrique, si $A = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ et $P \subseteq A$ est un idéal premier, alors $\mathrm{coht}(P)$ peut être interprétée comme la dimension de la variété algébrique associée au lieu des zéros de P.

5.2 Comparaison des invariants $\dim(A), s(A), e(A)$ et $\delta(A)$

Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien. On rappelle ici que

(1) $\dim(A)$ est la dimension de Krull de A,

(2) $e(A)$ est la dimension de plongement,

(3) $s(A)$ est la dimension de Chevalley,

(4) $\delta(A)$ est la dimension de Hilbert-Samuel.

Par définition on sait que $s(A) \leq e(A)$ et que $e(A)$ est finie. De plus, le Théorème 4.24 montre que $\delta(A) \leq e(A)$. Le résultat central de la théorie de la dimension qui est dû à Hilbert, Krull, Chevalley, Samuel et Serre est le suivant :

Théorème 5.4.

$$\dim(A) = s(A) = \delta(A) \leq e(A) < \infty.$$

Preuve On rappelle que par hypothèse $(A, \mathfrak{m})$ est un anneau local noethérien. La preuve, qui procède en trois étapes, montre les inégalités suivantes :

$$s(A) \geq \delta(A) \geq \dim(A) \geq s(A). \tag{5.1}$$

La première étape est élémentaire. La deuxième étape est technique, mais naturelle et fait appel au lemme d'Artin-Rees. La troisième étape est très astucieuse.

Étape 1 : $s(A) \geq \delta(A)$.

Soit $s = s(A)$. Alors, par définition de s, il existe un idéal $\mathfrak{q} := (x_1, \ldots, x_s)$ tel que $A/\mathfrak{q}$ est artinien. Ainsi $\sqrt{q} = \mathfrak{m}$. En vertu du Corollaire 4.29, on tire que $\delta(A) = \deg(\chi_{\mathfrak{q}}(T)) \leq s$.

Étape 2 : $\delta(A) \geq \dim(A)$.

On fait une preuve par induction sur $\delta(A)$. Si $\delta(A) = 0$, alors $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$ pour $n \gg 1$. Par Nakayama, on trouve $\mathfrak{m}^n = 0$ et donc A est artinien et $\dim(A) = 0$. Supposons que $\delta(A) \geq 1$ et que l'étape inductive soit vérifiée si $\delta(A) < d$. Soit

$$P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_d,$$

une chaîne d'idéaux premiers de longueur d. On veut montrer que $\delta(A) \geq d$. On a les deux inégalités triviales suivantes : $\dim(A/P_0) \geq d-1$ et $\delta(A) \geq \delta(A/P_0)$. En fait, on va montrer que l'inégalité plus forte suivante

$$\delta(A/P_0) \geq d \tag{5.2}$$

est toujours vraie. L'inégalité (5.2) implique automatiquement que $\delta(A) \geq d$. Comme A/P_0 est domaine (et qui à remplacer A par A/P_0) on peut supposer, sans perte de généralité, que A est un domaine et que $P_0 = (0)$ (remarquons que si A est un corps alors il n'y a rien à montrer). Soit $0 \neq a \in P_1$ et $\mathfrak{a} := (a)$. Alors l'application $[a] : A \to aA$, donnée par $x \mapsto ax$ est un isomorphisme de A-modules qui induit les isomorphismes suivants :

$$A/\mathfrak{m}^n \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{m}^n, \quad \text{pour } n \geq 1 \tag{5.3}$$

et donc $\ell_A(A/\mathfrak{m}^n) = \ell_A(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{m}^n)$ pour tout $n \geq 1$. On pose $\overline{A} := A/\mathfrak{a}$ et on notera par $A \to \overline{A}$, $x \mapsto \overline{x}$ la projection naturelle. Ainsi $\overline{\mathfrak{m}}$ est l'idéal maximal de $\overline{A}$ et

$$\overline{P}_1 \subset \overline{P}_2 \subset \ldots \subset \overline{P}_d,$$

est une chaîne d'idéaux premiers de $\overline{A}$ de longueur $d-1$. Ainsi on a $\dim(\overline{A}) \geq d-1$. Nous affirmons que

$$\delta(A) \geq \delta(\overline{A}) + 1 \tag{$\star$}$$

Par l'hypothèse d'induction, on a $\delta(\overline{A}) \geq d-1$. Donc, si l'on montre $(\star)$, on obtiendra $\delta(A) \geq d$. On va maintenant démontrer $(\star)$. On a la suite exacte courte

$$0 \to \mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}^n) \to A/\mathfrak{m}^n \to A/(\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^n) \to 0.$$

De cette suite on tire que

$$\ell(A/\mathfrak{m}^n) = \ell(\overline{A}/\overline{\mathfrak{m}}^n) + \ell(\mathfrak{a}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}^n).$$

Par le Lemme 1.39 (Lemme d'Artin-Rees), il existe $n_0 \geq 1$ tel que

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n-n_0}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}^{n_0}), \;\; \forall n \geq n_0.$$

On pose

$$f(n) := \chi_{\mathfrak{m}}(n) - \chi_{\overline{m}}(n) = \ell(\mathfrak{a}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}^n) = \ell(\mathfrak{a}/(\mathfrak{m}^{n-n_0}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}^{n_0}))).$$

si $n \geq n_0$ et $f(n) = 0$ (si $n < n_0$). Par définition, $f(n)$ est une fonction $\mathbb{Z}$-polynomiale. Nous affirmons que la propriété suivante est satisfaite :

(†) Les $\mathbb{Z}$-polynômes $\chi_{\mathfrak{m}}(T)$ et $f(T)$ ont le même degré et le même coefficient directeur.

Si l'on arrive à montrer (†), alors on obtiendra tout suite que

$$\delta(\overline{A}) = \deg(\chi_{\overline{\mathfrak{m}}}(T)) < \deg(\chi_{\mathfrak{m}}(T)) = \delta(A),$$

laquelle inégalité est équivalente à $(\star)$. Montrons (†). On a les relations

$$\mathfrak{a}\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n-n_0}(\mathfrak{a}\mathfrak{m}^{n_0}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n-n_0}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}^{n_0}) \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{m}^{n-n_0}, \tag{5.4}$$

pour tout $n \geq n_0$. De (5.4) on tire

$$\ell(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{m}^{n-n_0}) \leq \ell(\mathfrak{a}/(\mathfrak{m}^{n-n_0}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}^{n_0}))) \leq \ell(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{m}^n), \tag{5.5}$$

pour tout $n \geq n_0$. En combinant les isomorphismes (5.3) et (5.5), on trouve

$$\chi_{\mathfrak{m}}(n-r) \leq f(n) \leq \chi_{\mathfrak{m}}(n),$$

pour tout $n \geq n_0$. Le résulat suit.

Étape 3 : $\dim(A) \geq s = s(A)$.

On pose $d := \dim(A) = \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$. Notons que $d < \infty$ par l'Étape 2. Si $d = 0$, alors A est artinien et donc $s = 0$. À partir de maintenant, on supposera que $d \geq 1$. Soit

$$P_0 \subset P_1 \subset \ldots P_d,$$

une chaîne d'idéaux premiers de longueur maximale. Quitte à remplacer A par A/P_0 (remarquons que $\dim(A) = \dim(A/P_0)$), on peut supposer, sans perte de généralité que que $P_0 = (0)$ et que A est intègre. Nous allons montrer dans la suite, qu'il existe $r \leq d$ et $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m}$ tels que $\sqrt{(x_1, \ldots, x_r)} = \mathfrak{m}$. Ainsi $s(A) \leq r \leq d$. Pour ce faire, on considère la famille suivante

$$\mathcal{F} := \{\{x_1, x_2, \ldots, x_t\} \subseteq \mathfrak{m}\backslash\{0\}, t \geq 1 \ : \ [\{x_1, x_2, \ldots, x_i\} \subseteq P \in \mathrm{Spec}(A)] \Rightarrow [\mathrm{ht}(P) \geq i, 1 \leq i \leq t]\}.$$

Soit $a \in \mathfrak{m}\backslash\{0\}$. Alors $\{a\} \in \mathcal{F}$, car $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) \geq 1$. Choisissons (arbitrairement) un élément $\{x_1, \ldots, x_t\} \in \mathcal{F}$ où t est maximal. Nous affirmons que

(♣) $\mathfrak{m}$ est le seul idéal premier qui contient $\{x_1, \ldots, x_t\}$.

Si l'on montre (♣), alors on a $\sqrt{(x_1, \ldots, x_t)} = \mathfrak{m}$; et par définition de t, on a aussi $s(A) \leq t \leq d$. Ceci démontrera l'Étape 3. Il nous reste donc à montrer (♣). On fait une preuve par l'absurde. Supposons que $\mathfrak{m}$ n'est pas un idéal premier minimal contenant $\{x_1, \ldots, x_t\}$. On sait, par le Théorème 1.18, qu'il existe un nombre fini d'idéaux premiers contenant $\{x_1, \ldots, x_t\}$; disons $Q_1, \ldots, Q_\ell$. On a $t \leq \mathrm{ht}(Q_i) \leq d-1$ pour $1 \leq i \leq \ell$. Par le Lemme 1.2, on sait que $\bigcup_{j=1}^{\ell} P_j \subsetneqq \mathfrak{m}$. Ainsi on peut choisir $x_{t+1} \in \mathfrak{m}\backslash(\bigcup_{j=1}^{\ell} P_j)$. Soit $P \supseteq \{x_1, \ldots, x_t, x_{t+1}\}$ un idéal premier arbitrairement choisi. Alors P satisfait les propriétés

(i) $P \supseteq \{x_1, \ldots, x_t, x_{t+1}\}$

(ii) $\mathrm{ht}(P) \geq t$,

(iii) $P \supsetneqq Q_i$ pour $1 \leq i \leq \ell$.

Si $\mathrm{ht}(P) = \mathrm{ht}(Q_i)$ pour un certain i, alors P serait déjà dans la liste $\{Q_1, \ldots, Q_\ell\}$, ce qui contredit le (iii). Ainsi, on doit avoir que $\mathrm{ht}(P) > \mathrm{ht}(Q_i)$ pour $1 \leq i \leq \ell$, i.e., $\mathrm{ht}(P) \geq 1 + \mathrm{ht}(Q_i) \geq 1+t$ pour tout $1 \leq i \leq \ell$. Comme P était arbitraire, il suit que $\{x_1, \ldots, x_t, x_{t+1}\} \in \mathcal{F}$, ce qui contredit la maximalité de t. $\square$

Corollaire 5.5. *Soit A un anneau local noethérien. Alors tout chaîne décroissante d'idéaux premiers se stabilise. Plus précisément, la longueur d'une telle chaîne est nécessairement $\leq e(A)$.*

Théorème 5.6. *(Hauptidealsatz : Théorème de l'idéal principal) Soit A un anneau noethérien et $a \in A \backslash (A^\times \cup \{0\})$. Soit $P \in \mathrm{Spec}(A)$ tel que les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $x \in P$,

(ii) P est minimal parmi tous les idéaux premiers qui contiennent x.

Alors $\mathrm{ht}(P) \leq 1$. Si x n'est pas un diviseur de zéro, alors $\mathrm{ht}(P) = 1$.

Preuve On considère l'anneau local A_P. Comme P satisfait les conditions (i) et (ii), il suit que PA_P est l'unique idéal premier de A_P qui contient x. Ainsi, on a $\sqrt{(\frac{x}{1})} = PA_P$. Par conséquent,

$$\mathrm{ht}(P) = \dim(A_P) = s(A_P) \leq 1.$$

La deuxième égalité étant une conséquence du Théorème 5.4. Ceci démontre la première partie du théorème. Supposons que $x \notin \mathcal{DZ}(A)$. Alors, par la Proposition 2.11, on tire que $P \nsubseteq \bigcup_{P_i \in \mathrm{Ass}(A)}$. En vertu du Corollaire 2.12, il suit que P n'est pas un idéal premier minimal (on aurait pu aussi directement utiliser le Théorème 2.10). Donc $\mathrm{ht}(P) \geq 1$. $\square$

Théorème 5.7. *(Généralisation du Hauptidealsatz) Soit A un anneau noethérien et $I \subseteq A$ un idéal. Supposons que $I = (x_1, \ldots, x_r)$. Alors $\mathrm{ht}(P) \leq r$ pour chaque idéal premier P minimal par rapport à la propriété de contenir I. Réciproquement, un idéal premier P, de hauteur r, est un idéal premier minimal au-dessus d'un idéal I où I peut être engendré minimalement par r éléments.*

Preuve On travaille dans A_P. Par hypothèse on a que $PA_P = \sqrt{(\frac{x_1}{1}, \ldots, \frac{x_r}{1})}$. Ainsi, par le Théorème 5.4, on trouve $\mathrm{ht}(P) = \dim A_P = s(P) \leq r$. Réciproquement, si $\mathrm{ht}(P) = r$, comme $\mathrm{ht}(P) = s(A_P)$, en vertu de la Proposition 4.8 , il existe $x_1, \ldots, x_r \in P$ tels que $\sqrt{(\frac{x_1}{1}, \ldots, \frac{x_r}{1})} = PA_P$. Nous affirmons que P est minimal par rapport à la propriété de contenir $I := (x_1, \ldots, x_r)$. En effet, supposons qu'il existait $Q \subsetneqq P$ tel que $Q \supseteq (x_1, \ldots, x_r)$. Alors on aurait que $QA_P \supseteq (\frac{x_1}{1}, \ldots, \frac{x_r}{1})$ et donc $QA_P \supseteq \sqrt{(\frac{x_1}{1}, \ldots, \frac{x_r}{1})} = PA_P$. or ceci est absurde car $QA_P \subsetneqq PA_P$. Ainsi P doit être minimal par rapport à la propriété de contenir I. $\square$

Proposition 5.8. *Soit A un anneau noethérien. Soit $P_0 \subset P_1 \subset P_2$ une chaîne de longueur deux d'idéaux premiers. Alors il existe une infinité d'idéaux premiers Q tels que $P_0 \subset Q \subset P_2$.*

Preuve Sans perte de généralité, on peut supposer que $P_0 = (0)$ et que $\mathrm{ht}(P_2) \geq 2$. On fait une preuve par contradiction. Supposons qu'il n'y ait qu'un nombre fini d'idéaux premiers contenus dans P_2, à savoir, $Q_1, \ldots, Q_r$. Alors, par le Lemme 1.2, on a $\bigcup_{i=1}^{r} Q_i \neq P_2$. Soit $x \in P_2 \setminus \bigcup_{i=1}^{r} Q_i$. Clairement, P_2 est un idéal premier minimal de R qui contient x. Ainsi, par le Théorème 5.6, $\mathrm{ht}(P_2) \leq 1$. Contradiction. $\square$

6 Dimension de Krull des anneaux de polynômes

Dans cette section, nous donnerons une relation entre la dimension de Krull d'un anneau R et de son anneau de polynômes associés, $R[x]$ pour un anneau R pas nécessairement noethérien.

Commençons à montrer un résultat simple, mais fort utile.

Proposition 6.1. *Soit R un anneau et $R[x]$ l'anneau des polynômes à une variable. Soit $\iota : R \to R[x]$ l'inclusion naturelle. Soit $\mathfrak{q} \subseteq R$ un idéal premier. Alors $R[x]$ admet au plus deux idéaux premiers comparables qui admettent pour contraction $\mathfrak{p}$. Autrement dit, si $P_1 \subset P_2 \ldots \subset P_r$ est une chaîne (stricte, de longueur $r-1$) d'idéaux premiers de $R[x]$ tels que $P_j \cap R = \mathfrak{q}$ pour $1 \leq j \leq r$, alors $r \leq 2$.*

Preuve Si R est un corps, alors $R[x]$ est un DIP (Domaine à Idéaux Principaux). Ainsi, les longueurs maximales de chaînes d'idéaux premiers de $R[x]$ sont de longueur un (donc au plus deux idéaux dans la chaîne). Le résultat suit. Soit $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n \subset R$ un chaîne d'idéaux premiers distincts telle que $P_i \cap R = \mathfrak{p}$ pour $0 \leq i \leq n$. Comme $(R \cap P_i)/\mathfrak{p} = (R/\mathfrak{p}) \cap (P_i/\mathfrak{p})$, on peut, sans perte de généralité, supposer que $\mathfrak{p} = (0)$ et R est intègre. Soit $P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset R[x]$ une chaîne d'idéaux premiers distincts telle que $P_0 \cap R = P_1 \cap R = P_2 \cap R = (0)$. Soit $S = R \setminus \{0\}$. Alors S est un ensemble multiplicativement fermé dans R et $R[x]$. On pose $K = S^{-1}R$ pour le corps de fractions de R. Comme S est disjoint avec P_2, il suit du (3) de la Proposition 1.41 que $K[x]P_0 \subset K[x]P_1 \subset K[x]P_2 \subset K[x]$ est encore une chaîne stricte d'idéaux premiers (de longueur deux). Or ceci est absurde car $K[x]$ est un DIP. $\square$

Théorème 6.2. *Soit R un anneau, pas nécessairement noethérien. Alors*

$$(\star) \qquad 1 + \dim(R) \leq \dim(R[T]) \leq 1 + 2\dim(R).$$

Preuve On pose $S = R[T]$. Remarquons que $(\star)$ est une conséquence des trois observations suivantes :

(1) Si $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_r$ est une chaîne d'idéaux premiers de longueur r alors

$$P_0S \subset P_1S \ldots P_rS \subset (P_r, T),$$

est une chaîne d'idéaux premiers de longueur $r+1$ de S.

(2) Au plus, deux idéaux premiers comparables de S admettent une contraction à un idéal premier $\mathfrak{q} \subseteq R$ donné. Ceci n'est rien d'autre que la Proposition 6.1.

(3) Soit $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_r$ une chaîne d'idéaux premiers de $S = R[T]$. On pose $\mathfrak{p}_i := R \cap P_i$ pour $0 \leq i \leq r$. Il existe des indices distincts $\{i_0, i_1, \ldots, i_t\} \subseteq \{0, 1, \ldots, r\}$ tels que $0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_t = r$ et les $\mathfrak{p}_{i_j}$ $(0 \leq j \leq t)$ correspondent à l'ensemble des idéaux premiers distincts de l'ensemble $\{\mathfrak{p}_i : 0 \leq i \leq r\}$. Par le (2) on trouve que $t + 1 \geq \frac{r+1}{2}$, i.e., $r \leq 1 + 2t$. Donc $\dim(S) \leq 1 + 2\dim R$. $\square$

Le prochain théorème améliore substantiellement le Théorème 6.2 sous l'hypothèse additionnelle que R est noethérien.

Théorème 6.3. *Soit R un anneau noethérien. Alors* $\dim R[T_1, \ldots, T_n] = \dim R + n$.

Preuve On fait une preuve en deux étapes.

Première étape Par le théorème de la base de Hilbert (Théorème 1.38), il suffit de montrer le résultat pour $n = 1$. On pose $S = R[T]$. Par l'inégalité $(\star)$ il suffit de montrer que $\dim S \leq 1 + \dim R$. La remarque suivante est simple mais cruciale

(6.1) $$P \subseteq R \text{ est un idéal premier minimal au dessus de } I \iff$$
$$PS = P[T] \text{ est un idéal premier minimal au dessus de } IS = I[T]$$

En effet, soit $Q \subseteq R[T]$ un idéal premier quelconque tel $I[T] \subseteq Q$. Alors, nécessairement, $I \subseteq \mathfrak{q} := Q \cap R$ où $\mathfrak{q} \subseteq R$ est premier. En particulier, on doit avoir $I[T] \subseteq \mathfrak{q}[T] \subseteq Q$. Ainsi, chaque idéal premier de $R[T]$ qui est minimal par rapport à la propriété de contenir $I[T]$, est nécessairement de la forme $\mathfrak{q}[T]$ pour un certain idéal premier $\mathfrak{q}$ au-dessus de I. Ceci montre l'équivalence.

Soit maintenant $P \subseteq A$ un idéal premier quelconque. Comme R est noethérien, alors $\mathrm{ht}(P) < \infty$. Supposons maintenant que P est un idéal premier au-dessus de I (pas nécessairement minimal). Alors, nous affirmons que $\mathrm{ht}(P) = \mathrm{ht}(P[T])$. En effet, on applique tout simplement récursivement l'observation (6.1).

Deuxième étape Soit $Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_r$ une chaîne d'idéaux premiers de S de longueur maximale. Notons que $r < \infty$ en vertu du Théorème 6.2. On pose $\mathfrak{q}_i := Q_i \cap R$ pour $0 \leq i \leq r$. Si tous les $\mathfrak{q}_i$ sont distincts, alors $r \leq \dim(R) < 1+\dim(R)$. Sinon, posons s comme étant l'entier maximal tel que $\mathfrak{q}_s = \mathfrak{q}_{s+1}$. Alors, par définition de s, on doit avoir que Q_s est un idéal premier minimal au-dessus de $\mathfrak{q}_sS = \mathfrak{q}_s[T]$. Comme $\mathfrak{q}_s[T]$ est aussi premier, on doit conclure que $Q_s = \mathfrak{q}_s$. Par (6.1), on doit avoir $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}_s) = \mathrm{ht}(\mathfrak{q}_s[T]) = \mathrm{ht}(Q_s) \geq s$. D'autre part, par définition de s

$$\mathfrak{q}_s = \mathfrak{q}_{s+1} \subset \mathfrak{q}_{s+1} \subset \ldots \subset \mathfrak{q}_r$$

est une chaîne (stricte) d'idéaux premiers de R de longueur $r-s-1$. Ainsi

$$\dim(R) \geq r-s-1+\mathrm{ht}(\mathfrak{q}_s) \geq r-s-1+s = r-1.$$

Ainsi $r \leq 1+\dim(R)$. Ceci termine la preuve. $\square$

Références

[1] Jean-Pierre Serre, Local Algebra. Springer,

[2] H.Matsumura, commutative algebra.

[3] C.Musili, Algebraic Geometry for Beginners , University of Hyderabad

[4] D. Dummit, R. Foote, Abstract algebra, 2004

[5] Patrick Polo, Algèbre et théorie de Galois , notes de cours M1 , université Pierre et Marie Curie (France)

[6] Olivier Debarre, Algèbre 2, École Normale Supérieure (France)