Constructions classiques en algèbre homologique et applications aux anneaux locaux noethériens réguliers

Youcef Korichi

Travail dirigé sous la direction de

Hugo Chapdelaine

Université Laval

28 novembre 2016

Table des matières

Introduction

Dans ce travail, nous présentons certaines notions classiques d'algèbre homologique que nous appliquons par la suite à l'étude des anneaux locaux noethériens réguliers.

Pour la suite de l'introduction, R sera un anneau unitaire (pas nécessairement commutatif) et M un R-module. Donnons une brève description de chacune des sections. À la Section 1, on donne une brève introduction au langage de la théorie des catégories. À la Section 2, on introduit les foncteurs $\mathrm{Hom}_R(\_, M)$ $\mathrm{Hom}_R(M, \_)$ et $\_ \otimes_R M$. Pour chacun de ces foncteurs, on introduit la classe de modules acycliques qui lui correspond, à savoir, les modules projectifs, injectifs, resp. plats. À la Section 3, on formalise les propriétés de la catégorie des R-modules, ${}_R\mathbf{Mod}$, en introduisant la notion de catégories abéliennes. Par la suite, on introduit la notion importante de *complexes* dans une catégorie abélienne donnée. À la Section 4, on introduit quelques notions de base de l'algèbre homologique dans le cadre des catégories de R-modules : homotopie de complexes, la famille de foncteurs dérivés Tor_n et Ext^n, le cône d'un morphisme de complexes, le produit tensoriel de complexes et les complexes de Koszul associés à une suite d'éléments de R. À la Section 5, on introduit, dans un premier temps, différentes notions de dimension associées à un R-module M (R est un anneau quelconque pas nécessairement commutatif) : dimension projective, injective et plate. Deuxièmement, on introduit deux notions de dimension pour un anneau R donné : sa dimension globale à gauche (l'anneau R est quelconque) et sa dimension de Krull (l'anneau R est supposé commutatif). Troisièment, on introduit la notion importante de *profondeur* associée à un R-module M lorsque R est un anneau commutatif local et noethérien. Quatrièmement, on donne une formule exacte entre la profondeur de M et sa dimension projective. À la Section 6, dans un premier temps, on dégage certaines propriétés de base pour les anneaux locaux noethériens. Deuxièmement, on introduit la notion importante d'anneaux réguliers et on donne une caractérisation de ces derniers en terme de suites régulières. Troisièmement et finalement, on utilise la notion de complexes de Koszul associés à une suite régulière afin de montrer le célèbre théorème de Serre qui affirme qu'un anneau commutatif R, local et noethérien, est régulier, si et seulement si sa dimension globale est finie. Au passage, nous montrons en plus, que pour de tels anneaux, la dimension de Krull coïncide avec la dimension globale.

1 Catégories et foncteurs

Définition 1.1. Une **catégorie** $\mathcal{C}$ est la donnée de trois éléments :

(i) Une classe d'**objets** $\mathrm{obj}(\mathcal{C})$.

(ii) Un ensemble de **morphismes** $\mathrm{Hom}\,(A, B)$ pour toute paire ordonnée d'objets $(A, B) \in (\mathrm{obj}(\mathcal{C}))^2$.

(iii) Une **loi de composition**

$$\begin{aligned} \circ : \mathrm{Hom}\,(A, B) \times \mathrm{Hom}\,(B, C) &\longrightarrow \mathrm{Hom}\,(A, C) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

Ces éléments vérifient les axiomes suivants :

(1) Les ensembles Hom sont disjoints deux à deux.

(2) Pour tout objet A, il existe un **morphisme identité** $1_A \in \mathrm{Hom}\,(A, A)$ tel que $f \circ 1_A = f$ et $1_A \circ g = g$ pour tout $f \in \mathrm{Hom}\,(A, B)$ et pour tout $g \in \mathrm{Hom}\,(B, A)$ pour tout $B \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$.

(3) La loi de composition $\circ$ est associative : pour tous morphismes $f \in \mathrm{Hom}\,(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}(B, C)$ et $h \in \mathrm{Hom}(C, D)$ on a : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

À partir de maintenant, si $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ et $g \in \mathrm{Hom}(B, C)$ on écrira habituellement gf plutôt que $g \circ f$. Si plus d'une catégorie sont en jeu, alors on écrira $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ pour signaler que les objets et les flèches sont choisis dans la catégorie $\mathcal{C}$.

Exemple 1.2.

(i) **Ens.** Les objets sont les ensembles, et les morphismes sont les applications, avec la composition usuelle des applications ensemblistes.

(ii) **Top.** Les objets sont les espaces topologiques, et les morphismes sont les applications continues avec la composition usuelle.

(iii) **Grp.** Les objets sont les groupes, et les morphismes sont les morphismes de groupes avec la composition usuelle.

(iv) **Ab.** Les objets sont les groupes abéliens, et les morphismes sont les morphismes de groupes avec la composition usuelle.

(v) **Ord.** Les objets sont les ensembles ordonnés, et les morphismes sont les applications croissantes.

(vi) ${}_R\mathbf{Mod}$ Les objets sont les R-modules à gauche, et les morphismes sont les R-morphismes de modules à gauche.

(vii) $\mathbf{Mod}_R$ Les objets sont les R-modules à droite, et les morphismes sont les R-morphismes de modules à droite.

Définition 1.3. Un **foncteur covariant** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{D}$ est une “fonction” telle que :

(i) pour tout $A \in obj(\mathcal{C})$, $F(A) \in obj(\mathcal{D})$,

(ii) pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$ dans $\mathcal{C}$, $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(A'))$ dans $\mathcal{D}$,

(iii) si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A', A'')$ alors $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$,

(iv) pour tout objet $A \in obj(\mathcal{C})$, $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Exemple 1.4.

(i) Le **foncteur identité** $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, tel que pour tout objet A, et tout morphisme f, $1_{\mathcal{C}}(A) = A$, et $1_{\mathcal{C}}(f) = f$.

(ii) Le **foncteur Oubli** qui envoie les objets d'une catégorie sur les objets d'une autre catégorie en oubliant certaines propriétés : **Grp** $\to$ **Ens**, **Ab** $\to$ **Grp**

(iii) Le **foncteur Hom** $F_A := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \_) : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$, où $\mathcal{C}$ est une catégorie et $A \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$, défini par

  (a) $F_A(B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ pour tout $B \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$,

  (b) et si $f : B \to B'$, dans $\mathcal{C}$, alors $F_A(f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B')$ est donnée par $F_A(f)(h) = fh$ pour tout $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Lorsque l'application $f : B \to B'$ est fixée, on écrit habituellement

$$f_* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B')$$

plutôt que $F_A(f)$. L'application f_* est appelée l'image directe par f (push forward).

Définition 1.5. Un **foncteur contravariant** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{D}$ est une "fonction" telle que :

(i) pour tout $A \in obj(\mathcal{C})$, $F(A) \in obj(\mathcal{D})$,

(ii) pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$ dans $\mathcal{C}$, $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A'), F(A))$ dans $\mathcal{D}$,

(iii) si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A', A'')$ alors $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$,

(iv) pour tout objet $A \in obj(\mathcal{C})$, $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Exemple 1.6. Le **foncteur Hom** $F^A := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, A) : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$, où $\mathcal{C}$ est une catégorie et $A \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$, défini par

(a) $F^A(B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ pour tout $B \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$,

(b) et si $f : B \to B'$, dans $\mathcal{C}$, alors $F^A(f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B', A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ est donnée par $F^A(f)(h) = hf$ pour tout $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B', A)$.

Lorsque la flèche $f : B \to B'$ est fixé, l'application $F^A(f)$ est habituellement notée par

$$f^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B', A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A).$$

On appelle f^* le pullback (tiré par en arrière) induit par f.

2 Hom et produit tensoriel

2.1 Modules

Définition 2.1. Soit R un anneau donné. Un R**-module à gauche** est un groupe abélien additif M possédant une multiplication $R \times M \to M$, notée par $(r, m) \mapsto rm$, telle que, pour tout $m, m' \in M$ et $r, r' \in R$,

(i) $r(m + m') = rm + rm'$,

(ii) $(r + r')m = rm + r'm$,

(iii) $(rr')m = r(r'm)$,

(iv) $1m = m$.

Nous avons une définition similaire pour un R-module à droite avec une multiplication qui est notée par $(r, m) \mapsto mr$.

Définition 2.2. Soit M un R-module. Alors un **sous-module** N de M (noté $N \subseteq M$) est un sous groupe $N \leq M$ qui est stable sous l'action de R, i.e., pour tout $r \in R$ et $n \in N$, $rn \in N$.

Remarque 2.3. Pour signaler que l'action de R sur M est à gauche on écrira ${}_RM$. Pour signaler que l'action d'un anneau S sur M est à droite on écrira M_S. Sauf mention du contraire, les modules considérés seront toujours à gauche.

Exemple 2.4.

(i) Tout groupe abélien est naturellement un $\mathbb{Z}$-module.

(ii) Tout anneau R peut être vu comme un R-module à gauche. Un sous module $N \subseteq R = {}_R R$ n'est rien d'autre qu'un idéal à gauche.

(iii) Soit M un R-module et I un idéal à gauche de R. Alors

$$IM := \left\{ \sum_i r_i m_i : r_i \in I \; et \; m_i \in M \right\}$$

est un sous-module de M.

(iv) Soit X un sous-ensemble d'un R-module à gauche M. Alors

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{finie} r_i x_i : r_i \in R \; et \; x_i \in X \right\}$$

est le sous-module de M engendré par X.

Définition 2.5. On dit que M est un R-module libre si $M \simeq \bigoplus_{i \in I} R$ pour un ensemble d'indices I convenable.

Définition 2.6. Un R-module M est de **type fini** sur R si M peut être engendré par un ensemble fini, i.e, s'il existe un ensemble fini X tel que $M = \langle X \rangle$.

Pour la suite du document, nous travaillerons toujours dans une catégorie de R-modules pour un anneau R donné. Ainsi toutes les suites considérées seront toujours choisies à l'intérieur d'une catégorie de R-modules.

Définition 2.7. Une suite de R-modules

$$\ldots \to M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \to \ldots$$

est dite exacte si $\operatorname{im} f_{n+1} = \ker f_n$ pour tout n.

Exemple 2.8.

(i) Une suite $0 \to A \xrightarrow{f} B$ est exacte si et seulement si f est injectif.

(ii) Une suite $B \xrightarrow{g} C \to 0$ est exacte si et seulement si g est surjectif.

(iii) Une suite $0 \to A \xrightarrow{h} B \to 0$ est exacte si et seulement si h est un isomorphisme.

Définition 2.9. Une suite exacte courte

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$

est dite scindée s'il existe un morphisme $j : C \to B$ tel que $pj = 1_C$.

Proposition 2.10. si une suite exacte

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$

est scindée, alors $B \simeq A \oplus C$.

Preuve Facile. $\square$

2.1.1 Foncteur Hom

Définition 2.11. Un foncteur covariant (resp. contravariant) $F : {}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ est dit additif si pour tout paire de flèches $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ on a que $F(f+g) = Ff + Fg$.

Pour la suite, tous les foncteurs considérés $F : {}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ seront toujours supposés additifs.

Définition 2.12. Un foncteur *covariant* $F : {}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ est dit **exact à gauche** si l'exactitude de

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$$

entraîne l'exactitude de la suite de groupes abéliens

$$0 \to F(A) \xrightarrow{F(i)} F(B) \xrightarrow{F(p)} F(C).$$

Définition 2.13. Un foncteur *contravariant* $F : {}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ est dit **exact à gauche** si l'exactitude de

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$

entraîne l'exactitude de la suite de groupes abéliens

$$0 \to F(C) \xrightarrow{F(p)} F(B) \xrightarrow{F(i)} F(A).$$

Définition 2.14. Un foncteur *covariant* $F : {}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ est dit **exact à droite** si l'exactitude de

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$

entraîne l'exactitude de la suite de groupes abéliens

$$F(A) \xrightarrow{F(i)} F(B) \xrightarrow{F(p)} F(C) \to 0.$$

Définition 2.15. Un foncteur *contravariant* $F : {}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ est dit **exact à droite** si l'exactitude de

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$$

entraîne l'exactitude de la suite de groupes abéliens

$$F(C) \xrightarrow{F(p)} F(B) \xrightarrow{F(i)} F(A) \to 0.$$

Définition 2.16. Un foncteur covariant (resp. contravariant) $F : {}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ est dit **exacte**, si F est exacte à gauche et à droite.

Théorème 2.17. *Soit R un anneau (pas nécessairement commutatif) et X un R-module à gauche. Soit $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ est une suite exacte de R-modules. Alors*

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(X, A) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_R(X, B) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}_R(X, C),$$

est une suite exacte de groupes abéliens. En particulier, le foncteur covariant $\mathrm{Hom}_R(X, \_)$ est exacte à gauche. De manière similaire, le foncteur contravariant $\mathrm{Hom}_R(\_, X)$ est aussi exact à gauche.

Preuve Nous montrerons seulement que le foncteur $\mathrm{Hom}_R(X, \_)$ est exact à gauche. La preuve que le foncteur contravariant $\mathrm{Hom}_R(\_, X)$ est exact à gauche étant similaire.

(i) $\ker i_* = \{0\}$.
Soit $f \in \ker i_*$. Alors $i_*(f) = 0$. Ceci implique que $if(x) = 0$ pour tout $x \in X$. Comme i est injectif, $f(x) = 0$ pour tout $x \in X$, et donc $f = 0$.

(ii) $\mathrm{im}\, i_* \subseteq \ker p_*$.
Soit $g \in \mathrm{im}\, i_*$ Alors il existe $f \in \mathrm{Hom}_R(X, A)$ telle que $g = i_*(f) = if$. On a donc $p_*(g) = pg = pif = 0$, i.e., $i_*f \in \ker(p_*)$.

(iii) $\ker p_* \subseteq \mathrm{im}\, i_*$.
Soit $g \in \ker p_*$. Alors $pg(x) = 0$ pour tout $x \in X$. Ainsi $g(x) \in \ker p = \mathrm{im}\, i$. Il existe donc $a \in A$ tel que $i(a) = g(x)$. Comme i est injectif, cet élément a est unique. Par conséquent, la fonction $f : X \to A$, donnée par $f(x) = a$ si $g(x) = i(a)$, est bien définie. Nous affirmons que f est R-linéaire. En effet, soit $x, x' \in X$ tels que $g(x) = i(a)$ et $g(x') = i(a')$. On a $g(x + x') = g(x) + g(x') = i(a) + i(a') = i(a + a')$. Ainsi $f(x + x') = a + a' = f(x) + f(x')$ et donc f est additive. De manière similaire, soit $r \in R$, $x \in X$ et $a \in A$ tels que $g(x) = i(a)$. Comme i et g sont R-linéaires on a $g(rx) = i(ra)$. En particulier, on trouve $f(rx) = ra = rf(x)$, i.e., f est R-linéaire. Il suit donc que $f \in \mathrm{Hom}_R(X, A)$. Finalement, pour $g \in \ker p_*$, on a déjà montré que pour tout $x \in X$, il existe un unique $a_x \in A$ tel que $g(x) = i(a_x)$. Par définition de f (la fonction associée à g) on a $if(x) = i(a) = g(x)$ pour tout $x \in X$. Ainsi $i_*(f) = g$, i.e., $g \in \mathrm{im}\, i_*$.

□

Exemple 2.18. Nous avons vu que le foncteur Hom (covariant ou contravariant) est exact à gauche. L'exemple suivant montre qu'il n'est pas exact à droite. Considérons la suite exacte courte

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{p} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0. \tag{1}$$

L'inclusion naturelle $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Ainsi

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq \{0\}.$$

Or, comme $\mathbb{Q}$ n'a pas d'élément d'ordre 2, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = \{0\}$. Ainsi

$$p_* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

ne peut pas être surjectif. Ainsi le foncteur covariant $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \_)$ n'est pas exact à droite. Pour le cas contravariant, on peut appliquer, par exemple, le foncteur $\mathrm{Hom}(\_, \mathbb{Z})$ à (1). On a, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \neq \{0\}$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = \{0\}$ ($\mathbb{Z}$ ne contient pas d'élément non-trivial divisible). Il suit donc que $i^* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ ne peut être surjective. Ainsi, le foncteur contravariant $\mathrm{Hom}(\_, \mathbb{Z})$ n'est pas exact à droite.

2.2 Produit tensoriel

Définition 2.19. Soit R un anneau, A_R un R-module à droite et ${}_RB$ un R-module à gauche. On définit $F := \mathbb{Z}^{(A\times B)}$ (groupe libre engendré par les paires $(a,b) \in A \times B$ vues comme symboles) et on définit

$$S := \langle (a, b+b') - (a,b) - (a,b'), (a+a', b) - (a,b) - (a',b), (ar,b) - (a, rb) \rangle \leq \mathbb{Z}^{(A\times B)},$$

où $a, a' \in A$ et $b, b' \in B$. On définit $A \otimes_R B := F/S$. On appelle $A \otimes_R B$ le produit tensoriel de A et B. La classe $(a,b) + S \in F/S$ est notée par $a \otimes b$.

En général, $A \otimes_R B$ n'a qu'une structure de groupe abélien. Le groupe $A \otimes_R B$ est engendré, comme groupe abélien, par les éléments de la forme $a \otimes b$. Un élément $a \otimes b \in A \otimes_R B$ est appelé un tenseur simple.

Définition 2.20. Soit R et S des anneaux. On dit que M est un (R,S)-**bimodule**, ce que l'on notera par ${}_RM_S$, si M est un R-module à gauche, un S-module à droite, et

$$r(ms) = (rm)s$$

pour tous $r \in R$, $s \in S$ et $m \in M$.

Proposition 2.21. Soit $f : A_R \to A'_R$ et $g : {}_RB \to {}_RB'$ des morphismes de R-modules à droite et à gauche respectivement. Alors il existe un unique morphisme de groupes abéliens, $f \otimes g$, donné par

$$\begin{aligned} f \otimes g : A \otimes B &\to A' \otimes B' \\ a \otimes b &\mapsto f(a) \otimes g(b) \end{aligned}$$

Preuve Ce résultat est une conséquence de la propriété universelle satisfaite par le produit tensoriel. $\square$

Corollaire 2.22. *Considérons la suite de R-modules à droite $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$, et la suite de R-modules à gauche $B \xrightarrow{g} B' \xrightarrow{g'} B''$. Alors*

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g).$$

Preuve Il s'agit d'un calcul qui est une conséquence directe des définitions de $(f' \otimes g')$ et $(f \otimes g)$. $\square$

2.2.1 Foncteur produit tensoriel

Théorème 2.23. *Soit A_R un R-module à droite. Alors il existe un foncteur additif F_A : ${}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$, défini par*

(1) $F_A(B) = A \otimes_R B$,

(2) $F_f = 1_A \otimes_R f$ *pour tout* $f \in \mathrm{Hom}_R(B, B')$.

Soit ${}_RB$ *un* R*-module à gauche. Alors il existe un foncteur additif* $G_B : \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Ab}$ *défini par*

(i) $G_B(A) = A \otimes_R B$,

(ii) $F_g = g \otimes_R 1_B$ *pour tout* $g \in \mathrm{Hom}_R(A, A')$.

Preuve

(i) On a $F_A(1_B) = 1_A \otimes_R 1_B$, car pour tout générateur $a \otimes b$, on a

$$(1_A \otimes_R 1_B)(a \otimes b) = a \otimes_R b.$$

Comme les tenseurs simples $a \otimes_R b$ forment un ensemble de générateurs il suit que $1_A \otimes_R 1_B = 1_{(A \otimes_R B)}$.

(ii) $F_A(g'g) = 1_A \otimes g'g = (1_A \otimes g')(1_A \otimes g) = F_A(g')F_A(g)$.

Il suit donc que F_A est un foncteur que nous noterons habituellement par $A \otimes_R \_$. Il reste à montrer qu'il est additif. Soit $g, h : B \to B'$ deux homomorphismes de R-modules. Alors

$$F_A(g + h) = 1_A \otimes (g + h) = 1_A \otimes g + 1_A \otimes h = F_A(g) + F_A(h)$$

□

Proposition 2.24. Soit R un anneau, et M un R-module à gauche. Alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi : R \otimes_R M &\to M \\ r \otimes m &\mapsto rm \end{aligned}$$

est un R-isomorphisme.

Preuve On considère l'application $\psi : M \to R \otimes_R M, m \mapsto 1 \otimes m$. Il s'agit d'un R-morphisme. Pour tout $m \in M$, nous avons

$$\varphi\psi(m) = \varphi(\psi(m)) = \varphi(1 \otimes m) = m,$$

et

$$\psi\varphi(r \otimes m) = \psi(\varphi(r \otimes m)) = \psi(rm) = 1 \otimes rm = r \otimes m$$

Ainsi φ et ψ sont des inverses. □

Théorème 2.25. *Soit* A *un* R*-module à droite, et*

$$B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B'' \to 0$$

une suite exacte de R*-modules à gauche. Alors*

$$A \otimes_R B' \xrightarrow{1_A \otimes i} A \otimes_R B \xrightarrow{1_A \otimes p} A \otimes_R B'' \to 0$$

est une suit exacte de groupes abéliens. Autrement dit, le foncteur covariant $A \otimes_R \_$ *est exact à droite. De manière similaire, le foncteur covariant* $\_ \otimes_R C$ *(où* C *est* R*-module à gauche) est exact à droite.*

Preuve

(i) $\operatorname{im}(1 \otimes i) \subseteq \ker(1 \otimes p)$.
Nous avons $(1 \otimes p)(1 \otimes i) = 1 \otimes pi = 1 \otimes 0 = 0$.

(ii) Comme $\operatorname{im}(1 \otimes i) \subseteq \ker(1 \otimes p)$, il suit que $(1 \otimes p)$ induit un morphisme

$$\begin{aligned} \widehat{p} : (A \otimes_R B)/\operatorname{im}(1 \otimes i) &\to A \otimes_R B'' \\ \overline{(a \otimes b)} &\mapsto a \otimes p(b) \end{aligned}$$

Soit $\pi : A \otimes_R B \to (A \otimes_R B)/\operatorname{im}(1 \otimes i)$ la projection canonique. On a

$$\widehat{p}\pi(a \otimes b) = (a \otimes p(b)) = (1 \otimes p)(a \otimes b),$$

et donc $\widehat{p}\pi = 1 \otimes p$. Nous allons montrer que $\widehat{p}$ est un isomorphisme. En particulier, ceci impliquera que $\operatorname{im}(1 \otimes i) = \ker(1 \otimes p)$. Soit $a \otimes b'' \in A \otimes B''$. Comme p est surjectif, il existe $b \in B$, tel que $p(b) = b''$. On définit

$$\begin{aligned} f : A \times B'' &\to (A \otimes_R B)/\operatorname{im}(1 \otimes i) \\ (a, b'') &\mapsto \overline{(a \otimes b)}, \end{aligned}$$

où $p(b) = b''$. Nous affirmons que f est bien définie. Soit $b_1, b_2 \in B$ tels que $p(b_1) = p(b_2) = b''$. Alors $p(b_1 - b_2) = 0$ et donc $(b_1 - b_2) \in \ker p = \operatorname{im}(i)$. Par conséquent, il existe $b' \in B'$ tel que $i(b') = b_1 - b_2$; ainsi cela implique que $a \otimes (b_1 - b_2) = a \otimes i(b') \in \operatorname{im}(1 \otimes i)$. Comme

$$\overline{a \otimes b_1} = \overline{a \otimes b_2} + \overline{a \otimes (b_1 - b_2)} = \overline{a \otimes b_2},$$

il suit que f est bien définie. De la définition de f, on voit directement qu'elle est R-bilinéaire. La propriété universelle du produit tensoriel nous donne un morphisme de groupes abéliens

$$\begin{aligned} \widehat{f} : A \otimes B'' &\to (A \otimes_R B)/\operatorname{im}(1 \otimes i) \\ a \otimes b'' &\mapsto \overline{a \otimes b}. \end{aligned}$$

Un calcul direct montre que $\widehat{f}$ est l'inverse de $\widehat{p}$. En particulier, $\widehat{p}$ est un isomorphisme.

(iii) $1 \otimes p$ est surjectif.
Comme p est surjectif, pour tout $b'' \in B''$, il existe $b \in B$, tel que $b'' = p(b)$. Pour $a \in A$ on a $a \otimes b'' = (1 \otimes p)(a \otimes b)$. Comme $\operatorname{im}(1 \otimes p)$ engendre $A \otimes_R B''$ comme groupe abélien, il suit que $1 \otimes p$ est surjectif.

□

Exemple 2.26. Le théorème démontré précédemment montre que le foncteur $A \otimes_R \_$ est exacte à droite. L'exemple suivant, montre qu'il n'est pas exact à gauche en général. On considère la suit exacte

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0.$$

Comme $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \_$ est exacte à droite, la suite suivante

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{1\otimes i} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0,$$

est exacte. Par la Proposition 2.24, et la commutativité du produit tensoriel, on sait que

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Soit $a \otimes q \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ un tenseur simple quelconque. Nous avons

$$a \otimes q = 2a \otimes (q/2) = 0 \otimes (q/2) = 0.$$

Par conséquent, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \{0\}$. Il suit donc que $1 \otimes i$ ne peut être injectif.

Proposition 2.27. On considère le diagramme commutatif suivant avec les flèches pleines

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "h"] & 0 \\
B' \arrow[r, "j"'] & B \arrow[r, "q"'] & B'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les deux rangées sont exactes. Alors il existe un unique morphisme $h : A'' \to B''$, rendant le diagramme avec la flèche pointée h, commutatif. En plus, si f et g sont des isomorphismes, alors h est un isomorphisme.

Preuve Commençons par définir h. Soit $a'' \in A''$. Alors il existe $a \in A$ tel que $p(a) = a''$. On définit $h(a'') := qg(a)$. Montrons que h est bien définie. Soit $u \in A$ tel que $p(u) = a''$; alors on doit montrer que $qg(a) = qg(u)$. Comme $p(a) = p(u)$, on a $p(a-u) = 0$ et donc $a - u \in \ker(p) = \mathrm{im}(i)$. Ainsi $a - u = i(a')$ pour un certain $a' \in A$. On a donc

$$qg(a-u) = qgi(a') = qjf(a') = 0,$$

car $qj = 0$. Donc h est bien définie. Montrons l'unicité de h. Soit $h' : A'' \to B''$ une autre application telle que $h'p = qg$. Soit $a \in A$ tel que $pa = a''$. Alors

$$h'pa = h'a'' = qga = ha''.$$

Comme p est surjective, il suit que $h = h''$. Supposons maintenant que f et g sont des isomorphismes. On va montrer que h est un isomorphisme. Un argument similaire à la partie ci-haut montre qu'il existe un unique homomorphisme $h' : B'' \to A''$ qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f^{-1}"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g^{-1}"] & B'' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "h'"] & 0 \\
A' \arrow[r, "i"'] & A \arrow[r, "p"'] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On a

(i) $h'hp = h'qg = pg^{-1}g = p$; comme p est surjective il suit que $h'h = \mathrm{Id}_{A''}$,

(ii) $hh'q = hpg^{-1} = qgg^{-1} = q$; comme q est surjective il suit que $hh' = \mathrm{Id}_{B''}$.

Ceci termine la preuve. $\square$

Proposition 2.28. On considère le diagramme commutatif suivant avec les flèches pleines

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, dotted, "f"'] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & A'' \arrow[d, "h"] \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "j"'] & B \arrow[r, "q"'] & B'' \end{tikzcd}$$

où les deux rangées sont exactes. Alors il existe un unique morphisme $f : A' \to B'$ rendant le diagramme avec la flèche pointée f, commutatif. En plus, si g et h sont des isomorphismes, alors f est un isomorphisme.

Preuve Il s'agit d'une chasse au diagramme ; la preuve étant similaire à la preuve de la Propositon 2.27. $\square$

2.3 Modules projectifs

On supposera toujours que les flèches considérées sont prises dans la catégorie des R-modules à gauche.

Théorème 2.29. *Soit F un R-module libre. Si $p : A \to A''$ est surjectif, alors pour tout $h : F \to A''$, il existe g (non unique en général) tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\ A \arrow[r, "p"'] & A'' \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Preuve Soit B une R-base de F. Comme p est surjectif, pour tout $b \in B$, il existe $a_b \in A$ tel que $h(b) = p(a_b)$. Par l'axiome du choix, il existe une fonction $u : B \to A$ définie par $u(b) = a_b$ pour tout $b \in B$; et par linéarité, ceci nous donne un R-morphisme

$$\begin{aligned} g : F &\to A \\ b &\mapsto a_b \end{aligned}$$

On a $pg(b) = p(a_b) = h(b)$. Ainsi pg coïncide avec h sur la base B et comme ${}_R\langle B\rangle = F$ on obtient $pg = h$. $\square$

Définition 2.30. Un R-module P est **projectif** si, pour chaque morphisme p surjectif et h quelconque (tels qu'illustré dans le diagramme ci-bas), il existe un morphisme g tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\ A \arrow[r, "p"'] & A'' \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Proposition 2.31. Un R-module P est projectif si et seulement si tout suite exacte courte $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} P \to 0$ est scindée. En particulier, P est un facteur direct de B.

Preuve Facile. $\square$

Théorème 2.32.

(i) Un R-module P est projectif si et seulement si P est un facteur direct d'un R-module libre.

(ii) Un R-module de type fini P est projectif si et seulement si P est un facteur direct de R^n pour un certain n.

Preuve Facile. $\square$

Corollaire 2.33. *(i) Tout facteur direct d'un module projectif est projectif.*

(ii) Toute somme directe d'une collection de modules projectif est encore projectif.

Nous avons vu que tout R-module libre est projectif, l'exemple suivant montre qu'en général l'inverse est faux.

Exemple 2.34. Nous avons $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \langle\overline{2}\rangle \oplus \langle\overline{3}\rangle$. De plus, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est un module libre sur lui-même, par conséquent, $\langle\overline{2}\rangle \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est projectif. Comme $\overline{3} \cdot \overline{2} = \overline{0}$, il suit que $\langle\overline{2}\rangle$ n'est pas libre sur $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Proposition 2.35. Soit $(R, \mathfrak{m})$ est un anneau local et M un R-module de type fini. Alors les énoncés suivants sont équivalents :

1. M projectif.
2. M est plat.
3. M est libre.

Preuve Voir la Proposition 6.10 dans le présent travail. $\square$

Remarque 2.36. Kaplansky a montré que l'hypothèse que M est de type fini est en fait superflue, voir [5].

Proposition 2.37. Un R-module P est projectif si et seulement si le foncteur covariant $\mathrm{Hom}_R(P, \_)$ est exacte.

Preuve On considère une suite exacte courte quelconque

$$0 \to A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \to 0$$

Comme $\mathrm{Hom}_R(P, \_)$ est exacte à gauche, il suffit de montrer qu'il est exacte à droite, i.e, que p_* est surjectif. Si P est projectif, alors pour tout $h : P \to A''$, il existe $g : P \to A$ tel que $h = pg$. Ainsi, $h = pg = p_*(g) \in \mathrm{im} p_*$, et don p_* est surjectif. Supposons que $\mathrm{Hom}_R(P, \_)$ est exacte à droite. Alors p_* est surjectif : si $h \in \mathrm{Hom}_R(P, A'')$, alors il existe $g \in \mathrm{Hom}_R(P, A)$ tel que $h = p_*(g) = pg$. Ainsi le diagramme de la Définition 2.30 commute, et donc P est projectif. $\square$

2.4 Modules injectifs

Définition 2.38. Un R-module E est dit **injectif** si pour chaque morphisme i injectif, et f quelconque (tels qu'illustrés dans le diagramme ci-bas), il existe un morphisme g tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[ul, dotted, "g"'] \end{tikzcd}$$

Proposition 2.39. Le R-module E est injectif, si et seulement si toute suite exacte

$$0 \to E \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$

est scindée. En particulier, E est un facteur direct de B.

Preuve Facile. $\square$

Proposition 2.40.

(i) Tout produit direct de modules injectifs est injectif. En particulier, une somme directe finie de modules injectifs est injectif.

(ii) Tout facteur direct d'un module injectif est injectif.

Preuve Facile. $\square$

Proposition 2.41. Un R-module est injectif si et seulement si le foncteur contravariant $\mathrm{Hom}_R(\_, E)$ est exact.

Preuve Comme $\mathrm{Hom}_R(\_, E)$ est exacte à gauche, il suffit de montrer que i_* est surjectif quand i est injectif. Si $f \in \mathrm{Hom}_R(A, E)$ il existe $g \in \mathrm{Hom}_R(B, E)$ tel que $f = i^*(g) = gi$. Ainsi le diagramme de la Définition 2.38 commute, et donc E est injectif. Si E est injectif, alors pour tout $f \in \mathrm{Hom}_R(A, E)$, il existe $g \in \mathrm{Hom}_R(B, E)$ tel que $f = gi = i^*(g) \in \mathrm{im}\, i^*$. Ainsi le morphisme i^* est surjectif, et donc $\mathrm{Hom}_R(\_, E)$ est exacte. $\square$

2.5 Modules plats

Définition 2.42. Un R-module à gauche A est dit **plat** si le foncteur covariant $A \otimes_R \_$ est exacte.

Proposition 2.43. (i) Le R-module R est plat.

(ii) Une somme directe de R-modules est un module plat si et seulement si chaque facteur direct est plat.

(iii) Tout R-module projectif P est plat.

Preuve

(i) Puisque $R \otimes_R M \simeq M$ pour tout R-module M.

(ii) Par la distributivité de la somme directe sur le produit tensoriel combinée avec la projection et l'injection canonique.

(iii) Si P est projectif, alors $P \oplus Q = F$ où F est un R-module libre. Par le (i), on sait que F est plat. Finalement, comme $(P \otimes_R \_) \oplus (Q \otimes_R \_) \simeq F \otimes_R \_$ est exact, il suit que $P \otimes_R \_$ est exact et donc P est plat.

$\square$

Théorème 2.44. *Soit R un anneau commutatif et $S \subseteq R$ un ensemble multiplicativement fermé. On a un homomorphisme naturel d'anneaux $\pi : R \to S^{-1}R$ donnée par $r \mapsto \frac{r}{1}$ et donc on peut voir $S^{-1}R$ comme un R-module. Alors $S^{-1}R$ est un R-module plat.*

Preuve Soit $f : A \to B$ un morphisme injectif de R-modules. Montrons que $1 \otimes f : S^{-1}R \otimes_R A \to S^{-1}R \otimes_R B$ est injectif. Soit $u \in S^{-1}R \otimes_R A$. Alors il existe $s_i \in S$ et $a_i \in A$ tels que $u = \sum_i s_i^{-1} \otimes a_i$. En particulier, on a $u = \sum_i \frac{t_i}{t} \otimes a_i = t^{-1} \otimes \sum_i t_i a_i$ où $t = \prod_i s_i$ et $t_i = \frac{t}{s_i}$. En particulier, chaque élément de $S^{-1}R \otimes_R B$ peut être écrit comme un tenseur simple. Soit $u = s^{-1} \otimes a \in \ker(1 \otimes f)$. Alors $(1 \otimes f)(u) = s^{-1} \otimes f(a) = 0$ et donc, après multiplication par s, on trouve $1 \otimes f(a) = 0$ dans $S^{-1}R \otimes_R B$. Par conséquent, il existe $t \in S$ tel que $tf(a) = f(ta) = 0$. Comme f est injectif, il suit que $ta = 0$. Donc $1 \otimes ta = t(1 \otimes a) = 0$. Finalement, puisque $t \in S$, nous pouvons multiplier par t^{-1} dans $S^{-1}R \otimes B$ pour trouver $1 \otimes a = 0$. Donc $1 \otimes f$ est injectif. $\square$

Exemple 2.45. Nous avons vu que tout R-module projectif est plat. L'exemple suivant montre que la réciproque est fausse en général. Comme $\mathbb{Q} = \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}) = S^{-1}\mathbb{Z}$, où $S =$

$\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, il suit que $\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Z}$-module plat. Si $\mathbb{Q}$ était projectif, alors $\mathbb{Q}$ serait un facteur direct d'un module libre F. Ceci est impossible. En effet, supposons que $\mathbb{Q}$ soit un facteur direct d'un $\mathbb{Z}$-module libre F. Soit $p : F \to \mathbb{Q}$ la projection naturelle et $i : \mathbb{Q} \to F$ l'injection naturelle. Soit $(e_j)_j$ une base de F. On a $i(1) = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j$ pour certains $a_j \in \mathbb{Z}$. On pose $N = 1 + \max\{a_j : 0 \leq j \leq n\}$. On a $i(1) = N \cdot i(\frac{1}{N}) = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j$. Par conséquent $N|a_j$ pour tout j. Finalement, comme $N > a_j$ pour tout j, $a_j = 0$, et donc $1 = pi(1) = p(0) = 0$, ce qui est absurde.

On a cependant la réciproque partielle suivante :

Théorème 2.46. *(Lazard) Soit M un R-module plat. Alors M est isomorphe à une limite directe de R-modules libres de type fini.*

Preuve Voir le Théorème 5.40 de [10]. □

3 Complexes

3.1 Catégories abéliennes

Définition 3.1. Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **additive** si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ est un groupe abélien pour tout $A, B \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$.

(ii) Pour tout $X, Y \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$, et pour tout diagramme $X \xrightarrow{a} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{b} Y$ on a

  (1) $b(f + g) = bf + bg$,

  (2) $(f + g)a = fa + ga$.

(iii) La catégorie $\mathcal{C}$ a un objet nul, i.e, un objet qui est à la fois initial et final.

(iv) La catégorie $\mathcal{C}$ contient les produits et les coproduits finis de ses objets.

Définition 3.2. Un morphisme $u : B \to C$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ est un **monomorphisme** si u est simplifiable à gauche, i.e, pour tout objet A et pour toute paire de morphismes $f, g : A \to B$, $uf = ug$ implique $f = g$.

Remarque 3.3. On voit que $u : B \to C$ est un monomorphisme si et seulement si, pour tout objet A, le morphisme induit $u_* : \mathrm{Hom}\,(A, B) \to \mathrm{Hom}\,(A, C)$ est injectif.

Définition 3.4. Un morphisme $v : B \to C$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ est un **épimorphisme** si v est simplifiable à droite, i.e, pour tout objet D et tout morphismes $h, k : C \to D$, $hv = kv$ implique $h = k$.

Remarque 3.5. On voit que $v : B \to C$ est un épimorphisme si et seulement si, pour tout objet D, le morphisme induit $v^* : \mathrm{Hom}\,(C, D) \to \mathrm{Hom}\,(B, D)$ est injectif.

Définition 3.6. Soit $u : A \to B$ un morphisme dans une catégorie additive. Alors un **noyau** de $\ker u$, lorsqu'il existe, est un morphisme $i : K \to A$ qui satisfait la propriété universelle suivante : $ui = 0$ et pour tout $g : X \to A$ avec $ug = 0$, il existe un unique $\theta : X \to K$ tel que $i\theta = g$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, dotted, "\exists!\theta"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[drr, "0"] & & \\ K \arrow[r, "i"'] & A \arrow[r, "u"'] & B. \end{tikzcd}$$

Remarque 3.7. Notons qu'un noyau de $\ker u$, lorsqu'il existe, est unique à unique isomorphisme près. Ainsi lorsque qu'un noyau à une flèche u existe on pourra sans danger utiliser l'article défini "le".

Définition 3.8. Soit $u : A \to B$ un morphisme dans une catégorie additive. Alors un **conoyau** de $\operatorname{coker} u$, lorsqu'il existe, est un morphisme $\pi : B \to C$ qui satisfait la propriété universelle suivante : $\pi u = 0$ et pour tout $h : B \to Y$ tel que $hu = 0$, il existe un unique $\theta : C \to Y$ tel que $\theta\pi = h$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[drr, "0"'] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "h"] & C \arrow[d, dotted, "\exists!\theta"] \\ & & Y. \end{tikzcd}$$

Remarque 3.9. Notons qu'un conoyau de $\ker u$, lorsqu'il existe, est unique à unique isomorphisme près. Ainsi lorsque le conoyau d'une flèche u existe, on pourra, sans danger, utiliser l'article défini "le".

Proposition 3.10. Soit $u : A \to B$ un morphisme dans une catégorie additive $\mathcal{A}$.

(i) Si $\ker u$ existe, alors u est un monomorphisme si et seulement si $\ker u = 0$.

(ii) Si $\operatorname{coker} u$ existe, alors u est un épimorphisme si et seulement si $\operatorname{coker} u = 0$.

Preuve Montrons le (i). Soit $i : K \to A$ le noyau de la flèche $u : A \to B$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\ker u = 0$, i.e., $i = 0$. Soit $g : X \to A$ une flèche telle que $ug = 0$. La propriété universelle du noyau ($i : K \to A$) nous donne un (unique) morphisme $\theta : X \to K$ tel que $g = \theta i = \theta 0 = 0$. Soit maintenant f, g deux flèches telles que $uf = ug$. Alors $u(f - g) = 0$. Par le raisonnement, précédent, ceci implique $f - g = 0$. Ainsi $f = g$ et donc u est un monomorphisme.

($\Rightarrow$) Supposons que $u : A \to B$ soit un monomorphisme. On a $ui = 0 = u0$. Comme u est simplifiable, il suit que $i = 0$. La preuve de (ii) est laissée au lecteur puisqu'elle est "duale" à celle de (i). $\square$

Définition 3.11. Une catégorie $\mathcal{C}$ est une **catégorie abélienne** si elle est une catégorie additive qui satisfait les deux conditions supplémentaires suivantes :

(i) Tout morphisme admet un noyau et un conoyau.

(ii) Tout monomorphisme est un noyau et tout épimorphisme est un conoyau.

3.2 Complexes

Définition 3.12. Un **complexe de chaînes** (ou complexe tout simplement lorsque le contexte est clair) dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est une suite d'objets et de morphismes de $\mathcal{A}$ (appelées **différentielles**),

$$(\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet) = \ldots \to C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \to \ldots$$

tels que $d_n d_{n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Un **complexe de cochaînes** (ou complexe tout simplement lorsque le contexte est clair) dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est une suite d'objets et de morphismes de $\mathcal{A}$ (appelées **différentielles**),

$$(\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet) = \ldots \to C_n \xrightarrow{d_n} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_{n+2} \to \ldots$$

tels que $d_{n+1} d_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Définition 3.13. Si $(\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet)$ et $(\mathbf{C}'_\bullet, d'_\bullet)$ sont des complexes de chaînes, alors un **morphisme de complexes**

$$f = f_\bullet : (\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet) \to (\mathbf{C}'_\bullet, d'_\bullet)$$

est une suite de morphismes $f_n : C_n \to C'_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

La composition de deux morphismes de complexes

$$f_\bullet : (\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet) \to (\mathbf{C}'_\bullet, d'_\bullet) \text{ et } g_\bullet : (\mathbf{C}'_\bullet, d'_\bullet) \to (\mathbf{C}''_\bullet, d''_\bullet)$$

est un morphisme de complexes tel que : $(gf)_n = g_n f_n$. On a des définitions similaires pour les complexes de cochaînes.

Définition 3.14. Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, la catégorie de tous les complexes dans $\mathcal{A}$ est notée par $\mathbf{Comp}(\mathcal{A})$. Si R est un anneau, alors $\mathbf{Comp}({}_R\,\mathbf{Mod})$ est notée par ${}_R\mathbf{Comp}$, où tout simplement **Comp** lorsque le choix de l'anneau R est clair selon le contexte.

(i) Un **isomorphisme** dans **Comp** est un morphisme de complexes $f_\bullet : \mathbf{C}_\bullet \to \mathbf{C}'_\bullet$ tel que : $f_n : \mathbf{C}_n \to \mathbf{C}'_n$ est un isomorphisme dans $\mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (la suite des inverses f_n^{-1} est automatiquement un isomorphisme de complexes).

(ii) Si $((\mathbf{C}^i_\bullet, d^i_\bullet))_{i \in I}$ est une famille de complexes, alors leur **somme directe** est le complexe :

$$\bigoplus_i \mathbf{C}^i_\bullet = \ldots \to \bigoplus_i \mathbf{C}^i_{n+1} \xrightarrow{\oplus_i d^i_{n+1}} \bigoplus_i \mathbf{C}^i_n \xrightarrow{\oplus_i d^i_n} \bigoplus_i \mathbf{C}^i_{n-1} \to \ldots,$$

où $\oplus_i d^i_n$ agit coordonnée par coordonnée ; $\oplus_i d^i_n : (c^i_n) \mapsto (d^i_n c^i_n)$.

(iii) Une suite de complexes :

$$\ldots \to \mathbf{C}_\bullet^{m+1} \xrightarrow{f^{m+1}} \mathbf{C}_\bullet^{m} \xrightarrow{f^{m}} \mathbf{C}_\bullet^{m-1} \to \ldots$$

est **exacte** si $\operatorname{im} f^{m+1} = \ker f^m$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

Remarque 3.15. Une suite exacte courte de complexes peut être visualisée par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "i_{n+1}"] \arrow[d, "d'_{n+1}"'] & C_{n+1} \arrow[r, "p_{n+1}"] \arrow[d, "d_{n+1}"'] & C''_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{n} \arrow[r, "i_{n}"] \arrow[d, "d'_{n}"'] & C_{n} \arrow[r, "p_{n}"] \arrow[d, "d_{n}"'] & C''_{n} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{n}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r, "p_{n-1}"] \arrow[d] & C''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

où les rangées sont exactes. Notons qu'une suite de complexes

$$\ldots \to \mathbf{C}_\bullet^{n+1} \xrightarrow{f^{n+1}} \mathbf{C}_\bullet^{n} \xrightarrow{f^{n}} \mathbf{C}_\bullet^{n-1} \to \ldots$$

est exacte si et seulement si pour tout $m \in \mathbb{Z}$, le complexe respectif

$$\ldots \to C_m^{n+1} \to C_m^{n} \to C_m^{n-1} \to \ldots$$

est exact.

Exemple 3.16.

(i) Si $A \in \mathrm{obj}(\mathcal{A})$ et $k \in \mathbb{Z}$, alors la suite $\varrho^k(A)$ dont le k-ième terme est A, et les autres termes sont 0 et où tous les différentielles correspondent au morphisme nul, est un complexe appelé A **concentré en degré** k.

(ii) Le morphisme $f : A \to B$ définie un complexe $\Sigma^k(f)$, dont le k-ième terme est A, le $(k-1)$-ième terme est B, et les autres termes sont 0, avec f pour k-ième différentielle :

$$\Sigma^k(f) = \ldots \to 0 \to 0 \to A \xrightarrow{f} B \to 0 \to 0 \to \ldots.$$

dit f **concentré en degré** $(k, k-1)$.

(iii) Une suite exacte courte peut être vue comme le complexe :

$$\to 0 \to 0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0 \to 0 \to,$$

avec A placé en degré 2, B placé en degré 1 et C placé en degré 0.

Définition 3.17. Une **résolution** de A, où $A \in \mathrm{obj}({}_R\mathbf{Mod})$, est une suite exacte :

$$\mathbf{P} = \cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$$

où les P_i sont des modules quelconques. Une **résolution projective** de A est une résolution de A où chaque P_n est projectif. Une **résolution libre** d'un module A est une résolution de A où chaque P_n est libre. Une **résolution plate** d'un module A est une résolution de A où chaque P_n est plat. Si $\mathbf{P}$ est une résolution projective de A, alors sa *résolution projective réduite* est le complexe :

$$\mathbf{P}_A = \cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to 0.$$

où P_0 est placé en degré zéro.

Théorème 3.18. *Tout R-module A admet une résolution libre (en particulier projective et plate).*

Preuve Il existe un module libre F_0 et une suite exacte :

$$0 \to K_1 \xrightarrow{i_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0.$$

On peut appliquer le même raisonnement à K_1. Ainsi il existe un module libre F_1 et une suite exacte :

$$0 \to K_2 \xrightarrow{i_2} F_1 \xrightarrow{\varepsilon_1} K_1 \to 0.$$

En combinant les deux suites exactes nous obtenons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_2 \arrow[r] & F_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, "\varepsilon_1"'] & & F_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & A \arrow[r] & 0 , \\
& & & K_1 \arrow[ur, "i_1"'] & & &
\end{tikzcd}$$

En itérant cette construction, on obtient une famille de modules libres F_n qui s'organisent en une résolution de A. $\square$

Définition 3.19. Une **résolution injective** de A, ou $A \in \mathrm{obj}({}_R\mathbf{Mod})$ est une suite exacte

$$\mathbf{E} = 0 \to A \xrightarrow{\eta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \to \dots$$

où chaque E^n est injectif (notons que le sens des flèches a changé, il s'agit d'un complexe de cochaînes). Si $\mathbf{E}$ est une résolution injective de A, alors sa résolution injective réduite est le complexe :

$$\mathbf{E}^A = 0 \to E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \to \dots.$$

Proposition 3.20. Tout R-module A admet une résolution injective.

Preuve Tout R=module peut être plongée dans un R-module injectif (voir Théorème 3.38 de [10]). Il existe donc un module injectif E^0, une injection $\eta : A \to E^0$, et une suite exacte

$$0 \to A \xrightarrow{\eta} E^0 \xrightarrow{\pi} V^0 \to 0,$$

où $V^0 = \operatorname{coker} \eta = E^0/\eta(A)$ et π correspond à la projection canonique. De manière similaire, on plonge V^0 dans un module injectif E^1 pour construire une autre suite exacte courte. En combinant les deux suites exactes courtes on trouve :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\eta"] & E^0 \arrow[rr, "d^0"] \arrow[dr, "p"'] & & E^1 \arrow[r] & V^1 \arrow[r] & 0 , \\
& & & V^0 \arrow[ur, "\eta^1"'] & & &
\end{tikzcd}$$

En itérant cette construction, on construit une suite de modules injectifs (E^i) qui s'organisent en une résolution injective de A. $\square$

4 Homologie

Définition 4.1. Soit $(\mathbf{C}, d)$ un complexe de chaînes dans $\mathbf{Comp}({}_R\mathbf{Mod})$. On définit

(i) n-**chaînes** $:= C_n$,

(ii) n-**cycles** $:= Z_n(\mathbf{C}) = \ker d_n$,

(iii) n-**bords** $:= B_n(\mathbf{C}) = \operatorname{im} d_{n+1}$.

Définition 4.2. Si $\mathbf{C}$ est un complexe dans $\mathbf{Comp}({}_R\mathbf{Mod})$, et $n \in \mathbb{Z}$, alors son n-ième ***groupe d'homologie*** est

$$H_n(\mathbf{C}) := Z_n(\mathbf{C})/B_n(\mathbf{C}).$$

Pour tout $z \in Z_n(\mathbf{C})$ nous posons $\operatorname{cls}(z) = z + B_n(\mathbf{C})$, appelée la **classe d'homologie** de z.

Proposition 4.3. $H_n : \mathbf{Comp}({}_R\mathbf{Mod}) \to {}_R\,\mathbf{Mod}$ est un foncteur additif pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Preuve Nous avons, déjà défini les objets $H_n(\mathbf{C})$. Si $f : (\mathbf{C}, d) \to (\mathbf{C}', d')$ un morphisme de complexes, alors nous définissons :

$$\begin{aligned} H_n(f) : H_n(\mathbf{C}) &\to H_n(\mathbf{C}') \\ \operatorname{cls}(z_n) &\mapsto \operatorname{cls}(f_n z_n). \end{aligned}$$

Comme f est un morphisme de complexes, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & C'_n \arrow[r, "d'_n"'] & C'_{n-1}
\end{tikzcd}$$

Si $z \in Z_n(\mathbf{C})$, alors $d_n z = 0$. Par la commutativité du diagramme nous avons $d'_n f_n z = f_{n-1} d_n z = 0$ et donc $f_n z \in Z_n(\mathbf{C}')$. Montrons que $H_n(f)$ est bien définie. Soit $z + B_n(\mathbf{C}) = y + B_n(\mathbf{C})$. Alors $z - y \in B_n(\mathbf{C})$ et donc $z - y = d_{n+1}c$ pour un certain $c \in C_{n+1}$. Par conséquent,

$$f_n z - f_n y = f_n d_{n+1} c = d'_{n+1} f_{n+1} c \in B_n(\mathbf{C}'),$$

et donc $\mathrm{cls}(f_n z) = \mathrm{cls}(f_n y)$. Il suit $H_n(f)$ es bien défini. Un calcul direct montre que $H_n(1_{\mathbf{C}}) = 1_{H_n(\mathbf{C})}$. Si f et g sont des morphismes de complexes, alors

$$H_n(gf)(\mathrm{cls}(z)) = \mathrm{cls}((gf)_n z) = \mathrm{cls}(g_n f_n z) = H_n(g)H_n(f)(\mathrm{cls}(z)).$$

Ainsi H_n est un foncteur. Finalement, remarquons que

$$H_n(f+g)(\mathrm{cls}(z)) = \mathrm{cls}(f_n z + g_n z) = (H_n(f) + H_n(g))(\mathrm{cls}(z)),$$

et donc H_n est additif. Ceci termine la preuve. □

Définition 4.4. Nous appelons $H_n(f)$ le ***morphisme induit***, et nous le notons f_{n*}.

4.1 Suite exacte longue

Proposition 4.5. Soit

$$0 \to \mathbf{C}' \xrightarrow{i} \mathbf{C} \xrightarrow{p} \mathbf{C}'' \to 0$$

est une suite exacte courte de complexes. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il y a un morphisme dans ${}_R\mathbf{Mod}$

$$\partial_n : H_n(\mathbf{C}'') \to H_{n-1}(\mathbf{C}')$$

défini par

$$\partial_n : \mathrm{cls}(z''_n) \mapsto \mathrm{cls}(i^{-1}_{n-1} d_n p^{-1}_n z''_n).$$

Convention : Dans une chasse au diagramme, si $f : A \to B$ est une application, alors la notation $f^{-1}(b)$ devra être interprétée comme comme un choix (arbitraire) d'un élément dans l'ensemble image inverse $f^{-1}(b)$.

Preuve Considérons le diagramme commutatif suivant où les lignes horizontales sont exactes :

$$
\begin{tikzcd}
& {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "i_{n+1}"] \arrow[d, "d'_{n+1}"'] & C_{n+1} \arrow[r, "p_{n+1}"] \arrow[d, "d_{n+1}"'] & C''_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "d'_n"'] & C_n \arrow[r, "p_n"'] \arrow[d, "d_n"] \arrow[d, bend right] & C''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"] \arrow[l, bend right] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r, "p_{n-1}"] \arrow[d] \arrow[l, bend left] & C''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& {} & {} & {} &
\end{tikzcd}
$$

Soit $z'' \in C''_n$ tel que $d''_n z'' = 0$. Comme p_n est surjectif, il existe $c \in C_n$ tel que $p_n c = z''$ et $d_n c \in C_{n-1}$. Comme le carré $(C''_n, C_n, C_{n-1}, C''_{n-1})$ commute, nous avons $p_{n-1}(d_n c) = d''_n(p_n c) = d''_n z'' = 0$, ainsi, $d_n c \in \ker p_{n-1} = \operatorname{im} i_{n-1}$. Comme i_{n-1} est injectif, il existe un unique $c' \in C'_{n-1}$ avec $i_{n-1}c' = d_n c$. On définit

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\partial}_n : Z''_n &\longrightarrow C''_{n-1}/B''_{n-1} \\
z'' &\mapsto \operatorname{cls}(c') \in C''_{n-1}/B''_{n-1}
\end{aligned}
$$

Montrons que $\widetilde{\partial}_n$ est bien définie. Soit $\tilde{c} \in C_n$ tel que $p_n\tilde{c} = z''$. Alors $(c-\tilde{c}) \in \ker p_n = \operatorname{im} i_n$ Ainsi il existe $u' \in C'_n$ tel que $i_n u' = (c-\tilde{c})$. Comme le carré $(C'_n, C'_{n-1}, C_{n-1}, C_n)$ commute, nous avons

$$i_{n-1}d'_n u' = d_n i_n u' = d_n c - d_n\tilde{c}.$$

Par conséquent, $i_{n-1}^{-1}d_n c - i_{n-1}^{-1}d_n\tilde{c} = d'_n u' \in B'_{n-1}$. Nous avons donc

$$\operatorname{cls}(i_{n-1}^{-1}d_n c) = \operatorname{cls}(i_{n-1}^{-1}d_n\tilde{c}),$$

ce qui implique que $\widetilde{\partial}_n$ est bien définie. Montrons que $\widetilde{\partial}_n$ est un morphisme. Soit $z''_1, z''_2 \in Z''_n$ et $c_1, c_2 \in C_n$ tels que $p_n c_1 = z''_1$ et $p_n c_2 = z''_2$. Alors $p_n(c_1 + c_2) = (z''_1 + z''_2)$. Comme la définition de $\widetilde{\partial}_n$ ne dépend pas du choix de c tel que $p_n c = (z''_1 + z''_2)$, nous pouvons prendre $c_1 + c_2$ comme préimage de $z''_1 + z''_2$ pour l'application p_n. Ainsi

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\partial}_n(\operatorname{cls}(z'_1 + z'_2)) = \iota^{-1}(c_1 + c_2) + B''_{n-1} &= \iota^{-1}c_1 + \iota^{-1}c_2 + B''_{n-1} \\
&= \widetilde{\partial}_n(\operatorname{cls}(z'_1)) + \widetilde{\partial}_n(\operatorname{cls}(z'_1)).
\end{aligned}
$$

Montrons, que $c' \in Z'_{n-1}$, ainsi l'image de $\widetilde{\partial}_n$ sera en fait dans Z'_{n-1}/B'_{n-1}. Le carré $(C'_{n-1}, C'_{n-2}, C_{n-2}, C_{n-1})$ commute, ainsi nous avons

$$i_{n-2}d'_{n-1}c' = d_{n-1}i_{n-1}c' = d_{n-1}d_n c = 0.$$

Comme i_{n-2} est injectif, $d'_{n-1}c' = 0$ et donc $c' \in Z'_{n-1}$. Montrons, maintenant, que $\widetilde{\partial}_n(B''_n) = \{0\}$. Soit $c'' \in B''_{n+1}$ et $u \in C_{n+1}$. On pose $z'' = d''_{n+1}c'' \in B''_n$ et $c'' = p_{n+1}u$. La commutativité nous donne

$$p_n d_{n+1}u = d''_{n+1}p_{n+1}u = d''_{n+1}c'' = z''.$$

On choisit $d_{n+1}u$ comme préimage de z'' par l'application p_n^{-1}. Par conséquent,

$$\mathrm{cls}(i_{n-1}^{-1} d_n d_{n+1} u) = \mathrm{cls}(0) \in Z'_{n-1}/B'_{n-1},$$

car i_{n-1} est injectif. Ainsi, $\widetilde{\partial}_n$ descend en un morphisme $\partial_n : H_n(\mathbf{C}'') \to H_{n-1}(\mathbf{C}')$. $\square$

Définition 4.6. Le morphisme $\partial_n : H_n(\mathbf{C}'') \to H_{n-1}(\mathbf{C}')$ est appelé le **morphisme connecteur**.

Théorème 4.7. ***Suite exacte longue****. Soit*

$$0 \to \mathbf{C}' \xrightarrow{i} \mathbf{C} \xrightarrow{p} \mathbf{C}'' \to 0$$

une suite exacte courte de complexes. Alors la suite suivante est exacte :

$$\ldots \to H_{n+1}(\mathbf{C}'') \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(\mathbf{C}') \xrightarrow{i_{n*}} H_n(\mathbf{C}) \xrightarrow{p_{n*}} H_n(\mathbf{C}'') \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(\mathbf{C}') \to \ldots.$$

Preuve Pour alléger la notation, on notera i_{n*} par i_*, p_{n*} par p_* et ∂_n par ∂.

(i) $\mathrm{im}\ i_* \subseteq \ker p_*$:
$p_* i_* = (pi)_* = 0_* = 0$.

(ii) $\ker p_* \subseteq \mathrm{im}\ i_*$:
Soit $c \in Z_n := Z_n(\mathbf{C})$. On va montrer qu'il existe $c' \in Z'_n = Z_n(\mathbf{C}')$ tel que $i_*(\mathrm{cls}(c')) = \mathrm{cls}(c)$. On a $p_* \,\mathrm{cls}(z) = \mathrm{cls}(p_n z) = \mathrm{cls}(0)$. Ainsi $p_n z = d''_{n+1} c'' \in B''_n$ pour un certain $c'' \in C'''_{n+1}$. Comme p_{n+1} est surjectif, $c'' = p_{n+1} c$ pour un certain $c \in C_{n+1}$. Par la commutativité, on trouve

$$p_n z = d''_{n+1} c'' = d''_{n+1} p_{n+1} c = p_n d_{n+1} c,$$

et donc $p_n(z - d_{n+1}c) = 0$. Par l'exactitude, il existe $c' \in C'_n$ tel que $i_n c' = z - d_{n+1} c$. Ainsi,

$$i_{n-1} d'_n c' = d_n i_n c' = d_n z - d_n d_{n+1} c = d_n z = 0,$$

la dernière égalité provenant du fait que $z \in Z_n$. Comme i_{n-1} est injectif, il suit que $d'_n c' = 0$, et donc $c' \in Z'_n$. Nous avons donc

$$i_{n*}\,\mathrm{cls}(c') = \mathrm{cls}(i_n c') = \mathrm{cls}(z - d_{n+1} c) = \mathrm{cls}(z).$$

(iii) $\mathrm{im}\ p_* \subseteq \ker \partial$:
Soit $z \in Z_n$. On a

$$\partial p_* \,\mathrm{cls}(z) = \partial\, \mathrm{cls}(p_n z) = \mathrm{cls}(i_{n-1}^{-1} d_n p_n^{-1} p_n z) = \mathrm{cls}(i_{n-1}^{-1} d_n z) = \mathrm{cls}(0),$$

la dernière égalité utilisant le fait que z est un cycle et que i_{n-1} est injectif.

(iv) $\ker \partial \subseteq \operatorname{im} p_*$:

Soit $z'' \in Z''_n := Z_n(\mathbf{C}'')$ tel que $\partial \operatorname{cls}(z'') = \operatorname{cls}(0) \in Z'_n/B'_n$. Alors $z' = i_{n-1}^{-1} d_n p_n^{-1} z'' \in B'_{n-1}$. Par conséquent, $z' = d'_n c'$ pour un certain $c' \in C'_n$. De plus,

$$i_{n-1} z' = i_{n-1} d'_n c' = d_n i_n c' = d_n p_n^{-1} z'',$$

et donc $d_n(p_n^{-1} z'' - i_n c') = 0$. Comme $(p_n^{-1} z'' - i_n c') \in Z_n$, de l'exactitude, on trouve

$$p_* \operatorname{cls}(p_n^{-1} z'' - i_n c') = \operatorname{cls}(p_n p_n^{-1} z'' - p_n i_n c') = \operatorname{cls}(z'').$$

(v) $\operatorname{im} \partial \subseteq \ker i_*$:

On a

$$i_* \partial \operatorname{cls}(z'') = i_* \operatorname{cls}(i_{n-1}^{-1} d_n p_n^{-1} z'') = \operatorname{cls}(d_n p_n^{-1} z'') = 0,$$

et donc $i_* \partial = 0$.

(vi) $\ker i_* \subseteq \operatorname{im} \partial$:

Soit $z' \in Z'_n$ tel que $i_* \operatorname{cls}(z') = \operatorname{cls}(i_n z') = \operatorname{cls}(0)$. Alors $i_n z' = d_{n+1} c$, pour un certain $c \in C_{n+1}$, Par la commutativité, on trouve

$$d''_{n+1} p_{n+1} c = p_n d_{n+1} c = p_n i_n z' = 0.$$

Ainsi $p_{n+1} c \in Z''_n$. Finalement, remarquons que

$$\partial \operatorname{cls}(p_{n+1} c) = \operatorname{cls}(i_n^{-1} d_{n+1} p_{n+1}^{-1} p_{n+1} c) = \operatorname{cls}(i_n^{-1} d_{n+1} c) = \operatorname{cls}(i_n^{-1} i_n z') = \operatorname{cls}(z').$$

$\square$

Corollaire 4.8. *(**Lemme du Serpent**). On considère le diagramme commutatif suivant où les lignes sont exactes :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r] & B'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \tag{2}$$

Alors, nous avons la suite exacte :

$$0 \to \ker f \to \ker g \to \ker h \to \operatorname{coker} f \to \operatorname{coker} g \to \operatorname{coker} h \to 0.$$

Preuve Dans le théorème 4.7, nous prenons :

(1) $\mathbf{C}' = 0 \to 0 \to A' \xrightarrow{d'_0 = f} B' \to 0 \to 0.$

(2) $\mathbf{C} = 0 \to 0 \to A \xrightarrow{d_0 = g} B \to 0 \to 0.$

(3) $\mathbf{C}'' = 0 \to 0 \to A'' \xrightarrow{d''_0 = h} B'' \to 0 \to 0.$

En particulier, on a la suite exacte courte de complexes $0 \to \mathbf{C}' \to \mathbf{C} \to \mathbf{C}'' \to 0$. Nous trouvons :

$$\begin{gathered}\{0\}/\{0\} \to \ker f/\{0\} \to \ker g/\{0\} \to \ker h/\{0\} \\ \to B'/\operatorname{im} f \to B/\operatorname{im} g \to B''/\operatorname{im} h \to \{0\}/\{0\}.\end{gathered}$$

Ainsi

$$0 \to \ker f \to \ker g \to \ker h \to \operatorname{coker} f \to \operatorname{coker} g \to \operatorname{coker} h \to 0. \tag{3}$$

□

Théorème 4.9. *(Naturalité du Lemme du serpent) On peut superimposer deux diagrammes semblables à* (2) *et relier ces derniers par des flèches de sorte que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[rr] & & A_2 \arrow[rr] \arrow[dd, "a_2"] & & B_2 \arrow[rr] \arrow[dd, "b_2"] & & C_2 \arrow[rr] \arrow[dd, "c_2"] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & A_1 \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "a_1"] & & B_1 \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "b_1"] & & C_1 \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "c_1"] & & 0 & \\
& 0 \arrow[rr] & & A_2' \arrow[rr] & & B_2' \arrow[rr] & & C_2' \arrow[rr] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & A_1' \arrow[ur] \arrow[rr] & & B_1' \arrow[ur] \arrow[rr] & & C_1' \arrow[ur] \arrow[rr] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Alors le diagramme ci-bas commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[r] & \ker a_2 \arrow[r] & \ker b_2 \arrow[r] & \ker c_2 \arrow[r, "d_2"] & \operatorname{coker} a_2 \arrow[r] & \operatorname{coker} b_2 \arrow[r] & \operatorname{coker} c_2 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker a_1 \arrow[ur] \arrow[r] & \ker b_1 \arrow[ur] \arrow[r] & \ker c_1 \arrow[ur] \arrow[r, "d_1"] & \operatorname{coker} a_1 \arrow[ur] \arrow[r] & \operatorname{coker} b_1 \arrow[ur] \arrow[r] & \operatorname{coker} c_1 \arrow[ur] \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Preuve Exercice. □

Théorème 4.10. *(Naturalité de l'homomorphisme connecteur ∂) Soit $\mathcal{C} := \mathbf{Comp}({}_R\mathbf{Mod})$ la catégorie abélienne des complexes de R-modules. On considère le diagramme commutatif suivants dans $\mathcal{C}$*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{A}' \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{A} \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & \mathbf{A}'' \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{B}' \arrow[r] & \mathbf{B} \arrow[r] & \mathbf{B}'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes. Alors le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H_n(\mathbf{A}') \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & H_n(\mathbf{A}) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"'] & H_n(\mathbf{A}'') \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "h_*"'] & H_{n-1}(\mathbf{A}) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H_n(\mathbf{B}') \arrow[r] & H_n(\mathbf{B}) \arrow[r] & H_n(\mathbf{B}'') \arrow[r, "\partial_n"] & H_{n-1}(\mathbf{B}) \arrow[r] & \ldots.
\end{tikzcd}$$

Preuve Exercice. $\square$

4.2 Homotopie entre deux complexes

Définition 4.11. Soit $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ des complexes, et $p \in \mathbb{Z}$. Un ***p-morphisme de degré*** k, est une famille de morphismes $s = (s_n)$ où $s_n : C_n \to D_{n+k}$ pour tout n. (le "p" dans p-morphisme est pour pseudo ou presque ce qui nous permet de distinguer cette notion avec la notion de morphisme de complexes de degré k). Notons qu'on ne requiert pas que le complexe total commute, i.e., que $\partial_{n+k}s_n = s_{n+1}\partial_n$, ainsi il ne s'agit pas d'une morphisme de complexes en général. On écrit habituellement un tel p-morphisme entre deux complexes sous la forme $s : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$.

Définition 4.12. Les morphismes de complexes $f, g : (\mathbf{C}, d) \to (\mathbf{C}', d')$ sont ***homotopes***, si il existe un p-morphismes de degré 1, $s = (s_n) : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ tel que :

$$f_n - g_n = d'_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n$$

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d] \arrow[dl, "s_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, "s_{n-1}"] & {} \\
\arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & C'_n \arrow[r, "d'_n"'] & C'_{n-1} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Pour indiquer que f et g sont homotopes on écrira $f \simeq g$. Un morphisme de chaîne $f : (\mathbf{C}, d) \to (\mathbf{C}', d')$ est dit ***nul-homotope*** si $f \simeq 0$.

Théorème 4.13. *Soit $f, g : (\mathbf{C}, d) \to (\mathbf{C}', d')$ deux morphismes de complexes tels que $f \simeq g$. Alors*

$$f_{n*} = g_{n*} : H_n(\mathbf{C}) \to H_n(\mathbf{C}'),$$

pour tout n.

Preuve Soit $z \in Z_n(\mathbf{C})$. Alors $d_n z = 0$ et

$$f_n z - g_n z = d'_{n+1}s_n z + s_{n-1}d_n z = d'_{n+1}s_n z \in B_n(\mathbf{C}').$$

Ainsi $f_{n*} = g_{n*}$. $\square$

Définition 4.14. Un complexe $\mathbf{C}$ est dit ***contractile*** si $1_{\mathbf{C}} \simeq 0$.

Proposition 4.15. Si un complexe $\mathbf{C}$ est contractile, alors il est exacte.

Preuve Comme $1_{\mathbf{C}} \simeq 0$, pour tout $\operatorname{cls}(z) \in H_n(\mathbf{C})$, on a

$$\operatorname{cls}(z) = \operatorname{cls}(1_{\mathbf{C}} z) = (1_{\mathbf{C}})_* \operatorname{cls}(z) = 0_* \operatorname{cls}(z) = \operatorname{cls}(0).$$

Ainsi $H_n(\mathbf{C}) = \{0\}$ pour tout n. $\square$

Définition 4.16. Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ un morphisme de complexes. On dit que f est un quasi-isomorphisme si $f_{n*} : H_n(\mathbf{C}) \to H_n(\mathbf{C}')$ est un isomorphisme pour tout n

4.3 Foncteurs dérivés

Théorème 4.17. *(**Théorème de Comparaison**). Soit $f : A \to A'$ un morphisme dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$. On considère le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dotted, "\tilde{f}_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dotted, "\tilde{f}_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dotted, "\tilde{f}_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\dots \arrow[r] & P'_2 \arrow[r, "d'_2"'] & P'_1 \arrow[r, "d'_1"'] & P'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"'] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les les lignes horizontales sont des complexes. Si tous les P_n sont projectifs, et la ligne du bas est exacte, alors il existe un morphisme de complexes $\tilde{f} : \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}'_{A'}$ qui rend le diagramme commutatif. En plus, si un autre morphisme de complexe $\tilde{g} : \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}'_{A'}$ rend le diagramme commutatif, alors $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$.

Remarque 4.18. L'énoncé dual au Théorème 4.17 est aussi vrai lorsque l'on remplace les complexe de chaînes par les complexes de cochaînes.

Preuve Nous procédons par induction sur $n \geq 0$ afin de montrer l'existence des $\tilde{f}_n$.

Étape $n = 0$: On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & P_0 \arrow[dl, dotted, "\tilde{f}_0"'] \arrow[d, "f\varepsilon"] & \\
P'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"'] & A' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Comme ε' est surjectif, et P_0 est projectif, il existe un morphisme $\tilde{f}_0 : P_0 \to P'_0$ qui rendant le diagramme commutatif.

Étape $n \geq 1$: On considère le sous-diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\tilde{f}_n"'] & P_{n-1} \arrow[d, "\tilde{f}_{n-1}"] \\ P'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & P'_n \arrow[r, "d'_n"'] & P'_{n-1}. \end{tikzcd}$$

Par commutativité du diagramme, on a $d'_n \tilde{f}_n d_{n+1} = \tilde{f}_n d_n d_{n+1} = 0$. Par conséquent, $\operatorname{im}(\tilde{f}_n d_{n+1}) \subseteq \ker d'_n = \operatorname{im} d'_{n+1}$. Ainsi, on peut considérer le diagramme

$$\begin{tikzcd} & P_{n+1} \arrow[dl, dotted, "\tilde{f}_{n+1}"'] \arrow[d, "\tilde{f}_n d_{n+1}"] & \\ P'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & \operatorname{im} d'_{n+1} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Comme P_{n+1} est projectif, il existe un morphisme $\tilde{f}_{n+1} : P_{n+1} \to P'_{n+1}$ rendant le diagramme commutatif. Par induction, le résultat suit. La preuve de l'unicité de $\tilde{f}$, à homotopie près, est laissée au lecteur. $\square$

Définition 4.19. On dit qu'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ a suffisamment d'objets projectifs (resp. d'objets injectifs), si pour tout objet $C \in \operatorname{obj}(\mathcal{A})$ il existe un épimorphisme $f : P \to C$ (resp. un monomorphisme $\iota : C \to E$) où P est projectif (resp. où E est injectif).

Remarque 4.20. Soit R un anneau. Alors la catégorie ${}_R\mathbf{Mod}$ a suffisamment d'objets projectifs. En effet, pour tout R-module M il existe un module libre F et un épimorphisme $f : F \to M$. On a aussi vu auparavant que ${}_R\mathbf{Mod}$ admettait suffisamment d'objets injectifs.

Définition 4.21. Soit $T : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ un foncteur covariant (pas nécessairement exact à droite) entre deux catégories abéliennes où $\mathcal{A}$ admet suffisamment de projectifs. Nous allons construire une famille de foncteurs associées à T, $L_nT : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ pour $n \geq 0$. Les foncteurs L_nT sont appelés les foncteurs dérivés à gauche de T. Les foncteurs L_nT mesureront en quelque sorte le défaut d'exactitude à gauche du foncteur T.

(i) Objets : Nous prenons une résolution projective de A

$$\mathbf{P} = \ldots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$$

puis nous appliquons le foncteur T à la résolution réduite associée $\mathbf{P}_A$. Ainsi $T\,\mathbf{P}_A$ est un complexe, non exact en général. On définit

$$(L_nT)A := H_n(T\,\mathbf{P}_A).$$

(ii) Morphismes : Soit $f : A \to A'$ un morphisme. Par le théorème de comparaison, il existe un morphisme de complexes $\tilde{f} : \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}_{A'}$. Nous définissons $(L_nT)f : (L_nT)A \to (L_nT)A'$ par

$$(L_nT)f := H_n(T\tilde{f}) = (T\tilde{f})_{n*}.$$

Soit $S : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ un foncteur covariant (pas nécessairement exact à gauche) entre catégories abéliennes où $\mathcal{A}$ admet suffisamment d'injectifs. Nous allons construire une famille de foncteurs associées à S, $R_nS : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ pour $n \geq 0$. Les foncteur R_nS sont appelés les foncteurs dérivés à droite de S.

(i) Objets :
Nous prenons une résolution injective de A

$$\mathbf{E} = 0 \to A \xrightarrow{\eta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \xrightarrow{d^2} E^3$$

à laquelle nous appliquons le foncteur S à la résolution réduite $\mathbf{E}^A$. Ainsi $S\mathbf{E}^A$ est un complexe, non exact en général. On définit

$$(R_nS)A := H_n(S\mathbf{E}^A).$$

(ii) Morphismes :
Si $f : A \to A'$ est un morphisme, par un résultat dual au théorème de comparaison, nous avons un morphisme de complexes $\tilde{f} : \mathbf{E}^A \to \mathbf{E}^{A'}$ unique, a homotopie prés. Nous définissons $(R^nS)f : \mathbf{E}^A \to \mathbf{E}^{A'}$ par

$$(R^nS)f = H_n(S\tilde{f}) := (S\tilde{f})_{n*}.$$

Expliquons brièvement, pourquoi les foncteurs dérivés sont bien définis. Soit $\mathbf{P}_A$ et $\mathbf{P}'_A$ deux résolutions projectives réduites de A. Par le Théorème 4.17, il existe des morphismes $\kappa : \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}'_A$ et $\iota : \mathbf{P}'_A \to \mathbf{P}_A$. De plus, $\mathrm{Id}_{\mathbf{P}_A} : \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}_A$ et $\mathrm{Id}_{\mathbf{P}'_A} : \mathbf{P}'_A \to \mathbf{P}'_A$ sont clairement des homotopies. Il suit donc, par l'unicité du morphisme $\tilde{f}$, à homotopie près, (apparaîssant dans le Théorème 4.17), que $\kappa\iota \simeq \mathrm{Id}_{\mathbf{P}_A}$ et $\iota\kappa \simeq \mathrm{Id}_{\mathbf{P}'_A}$. Ainsi κ et ι induisent des isomorphismes entre l'homologie de $\mathbf{P}_A$ et $\mathbf{P}'_A$.

Le lemme suivant est utile

Lemme 4.22. *Soit* $0 \to A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \to 0$ *une suite exacte courte de R-modules. Alors il existe une suite exacte courte de complexes*

$$0 \to \mathbf{P}_{A'} \to \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}_{A''} \to 0$$

où $\mathbf{P}_{A'}$, $\mathbf{P}_A$, $\mathbf{P}_{A''}$ sont des résolutions projectives réduites de A', A et A'' respectivement.

Preuve L'exactitude de la suite de R-modules $0 \to A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \to 0$ permet de construire le diagramme commutatif suivant :

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[u] \arrow[r, "i"] & A \arrow[u] \arrow[r, "p"] & A'' \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_0 \arrow[u, "\varepsilon'"'] \arrow[r, "\tilde{i}_0"'] & (P'_0 \oplus P''_0) \arrow[u, "\varepsilon"] \arrow[r, "\tilde{p}_0"'] & P''_0 \arrow[u, "\varepsilon''"] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \dots \arrow[u] \arrow[r] & \dots \arrow[u] \arrow[r] & \dots \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_n \arrow[u, "d'_n"'] \arrow[r, "\tilde{i}_n"'] & (P'_n \oplus P''_n) \arrow[u, "d_n"] \arrow[r, "\tilde{p}_n"'] & P''_n \arrow[u, "d''_n"] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \dots \arrow[u] \arrow[r] & \dots \arrow[u] \arrow[r] & \dots \arrow[u] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

où les colonnes de gauche et de droite sont des résolutions projectives de A' et A''. La colonne du centre et les morphismes qui arrivent et partent de cette dernière sont construits de manière inductive, en partant du haut vers le bas, de la manière suivante : Soit $\tilde{i}_n : P'_n \to P'_n \oplus P''_n$ l'injection canonique et $\tilde{p}_n : P'_n \oplus P''_n \to P''_n$ la projection canonique. Expliquons comment construire le morphisme ϵ. On définit $\varepsilon(x, y) := (\iota\varepsilon'(x), \theta(y))$ pour tout $x \in P'_0$ et $y \in P''_0$ où θ est choisie de sorte que le diagramme suivant commute :

$$
\begin{tikzcd}
 & P''_0 \arrow[dl, "\theta"'] \arrow[d, "\epsilon''"] & \\
A \arrow[r, "p"'] & A'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}
$$

Comme ϵ et ϵ'' sont surjectifs et que les deux premiers étages du diagramme commutent (en partant du haut), il suit que ϵ est surjectif. En itérant cette construction, on construit les étages succesifs. Finalement, on vérifie que la colonne du centre est belle et bien une résolution de A. Par conséquent,

$$0 \to \mathbf{P}_{A'} \to \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}_{A''} \to 0$$

Ceci termine la preuve. $\square$

Lemme 4.23. *On considère le diagramme commutatif suivant*

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{A}' \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{A} \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & \mathbf{A}'' \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{B}' \arrow[r] & \mathbf{B} \arrow[r] & \mathbf{B}'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}
$$

où les lignes sont exactes. Soit

(1) $0 \to \mathbf{P}_{A'} \to \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}_{A''} \to 0,$

(2) $0 \to \mathbf{Q}_{B'} \to \mathbf{Q}_B \to \mathbf{Q}_{B''} \to 0,$
deux suites exactes courtes de complexes où $\mathbf{P}_{A'}, \mathbf{P}_A, \mathbf{P}_{A''}$ *sont des résolutions projectives réduites de* A', A *et* A'' *respectivement et* $\mathbf{Q}_{B'}, \mathbf{Q}_B, \mathbf{Q}_{B''}$ *sont des résolutions (pas nécessairement projectives) de* B', B *et* B'' *respectivement. Alors il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{P}_{A'} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{f}"'] & \mathbf{P}_A \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{g}"'] & \mathbf{P}_{A''} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{h}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Q}_{B'} \arrow[r] & \mathbf{Q}_B \arrow[r] & \mathbf{Q}_{B''} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

où $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ *et* $\widetilde{h}$ *prolongent* f, g *et* h *respectivement. De plus, si* $\overline{f}, \overline{g}, \overline{h}$ *sont d'autres prolongements qui rendent le diagramme ci-haut commutatif, alors* $\widetilde{f} \simeq \overline{f}$*,* $\widetilde{g} \simeq \overline{g}$*,* $\widetilde{h} \simeq \overline{h}$*.*

Preuve L'existence des deux suites exactes courtes (1) et (2) est garantie par le Lemme 4.22. On peut construire un morphisme $\widetilde{f}$ en utilisant de manière inductive le Théorème 4.17. Par la suite, on construit successivement, toujours en invoquant le Théorème 4.17 de manière inductive, le morphisme $\widetilde{g}$ suivi du morphisme $\widetilde{h}$. Le résultat suit. $\square$

4.4 Tor

Définition 4.24. Soit B est un R-module à gauche. On considère le foncteur covariant $T = \_ \otimes_R B : \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Ab}$. Nous définissons $\mathrm{Tor}_n^R(\_, B) : \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Ab}$ comme

$$\mathrm{Tor}_n^R(\_, B) := L_n T.$$

Concrètement, si $\mathbf{P} = \ldots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$ est une résolution projective de A, alors

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, B) = H_n(\mathbf{P}_A \otimes_R B) = \frac{\ker(d_n \otimes 1_B)}{\mathrm{im}(d_{n+1} \otimes 1_B)}.$$

Définition 4.25. Soit A est un R-module à droite. On considère le foncteur covariant $T = A \otimes_R \_ : {}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$. Nous définissons $tor_n^R(A, \_) : {}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ comme

$$tor_n^R(A, \_) := L_n T.$$

Concrètement, si $\mathbf{Q} = \ldots \to Q_2 \xrightarrow{d_2} Q_1 \xrightarrow{d_1} Q_0 \xrightarrow{\eta} B \to 0$ est une résolution projective, alors

$$tor_n^R(A, B) := H_n(A \otimes_R \mathbf{Q}_B) = \frac{\ker(1_A \otimes d_n)}{\mathrm{im}(1_A \otimes d_{n+1})}.$$

Remarque 4.26. Nous ne garderons que la notation $\mathrm{Tor}_n^R(A, B)$, car, on peut montrer que

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, B) \simeq tor_n^R(A, B).$$

Proposition 4.27. Pour tout R-module à droite A, et à gauche B, nous avons un isomorphisme

$$\mathrm{Tor}_0^R(A,B) \simeq A \otimes_R B.$$

Preuve Soit $\mathbf{P} = \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$ une résolution projective de A. Par définition $\mathrm{Tor}_0^R(A,B) = \mathrm{coker}\,(d_1 \otimes 1_B)$. L'exactitude à droite de $\_ \otimes_R B$ nous donne la suite exacte

$$P_1 \otimes_R B \xrightarrow{d_1 \otimes 1_B} P_0 \otimes_R B \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1_B} A \otimes_R B \to 0.$$

Nous avons

$$A \otimes_R B \simeq \frac{(P_0 \otimes_R B)}{\ker(\varepsilon \otimes 1_B)} \simeq \frac{(P_0 \otimes_R B)}{\mathrm{im}(d_1 \otimes B)} \simeq \mathrm{coker}(d_1 \otimes 1_B) = \mathrm{Tor}_0^R(A,B).$$

$\square$

Corollaire 4.28. *Soit* $0 \to A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \to 0$ *est une suite exacte dans* $\mathbf{Mod}_R$. *Alors il existe une suite exacte longue :*

$$\xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathrm{Tor}_n^R(A',B) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Tor}_n^R(A,B) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Tor}_n^R(A'',B) \xrightarrow{\partial_n}$$

$$\cdots$$

$$\xrightarrow{\partial_1} A' \otimes_R B \xrightarrow{i_*} A \otimes_R B \xrightarrow{p_*} A'' \otimes_R B \to 0$$

Nous voyons que Tor représente le défaut d'exactitude du foncteur $\mathrm{Hom}_R(\_, B)$.

Proposition 4.29. Soit $T : {}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ un foncteur covariant additif. Si P est projectif, alors $(L_nT)P = 0$. En particulier, si P et Q sont projectifs, alors pour tout $A \in {}_R\mathbf{Mod}$, $B \in \mathbf{Mod}_R$ et $n \geq 1$, nous avons

$$\mathrm{Tor}_n^R(P,B) = \{0\} \text{ et } \mathrm{Tor}_n^R(A,Q) = \{0\}.$$

Preuve Il suffit de prendre $\mathbf{P}_P = 0$ et $\mathbf{P}_Q = 0$. $\square$

Corollaire 4.30. *Soit*

$$\mathbf{P} = \ldots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$$

une résolution projective du R-module A. On pose $K_0 = \ker \varepsilon$, et $K_n = \ker d_n$, pour tout $n \geq 1$. Alors,

$$(L_{n+1}T)A \simeq (L_nT)K_0 \simeq (L_{n-1}T)K_1 \simeq \ldots \simeq (L_1T)K_{n-1}.$$

En particulier, si $A \in \mathbf{Mod}_R$ et $B \in {}_R\mathbf{Mod}$, alors

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(A,B) \simeq \mathrm{Tor}_n^R(K_0,B) \simeq \ldots \simeq \mathrm{Tor}_1^R(K_{n-1},B).$$

Exemple 4.31. Calculons $\mathrm{Tor}_k^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B)$ où B est un groupe abélien. Considérons la résolution projective suivante de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vue comme un $\mathbb{Z}$-module :

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{[n]} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0.$$

Si on applique le foncteur covariant $\_ \otimes_{\mathbb{Z}} B$ à cette résolution on trouve

$$0 \to \mathbb{Z} \otimes B \xrightarrow{[n]\otimes 1_B} \mathbb{Z} \otimes B \to 0,$$

lequel complexe est isomorphe à $0 \to B \xrightarrow{[n]} B \to 0$. Ainsi on trouve

(i) $(\mathbb{Z} \otimes B)/(n\mathbb{Z} \otimes B) \simeq \mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) = B/nB$,

(ii) $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) = \ker[n]/\{0\} \simeq B[n]$.

(iii) $\mathrm{Tor}_k^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) = \{0\}/\{0\} \simeq 0$ si $k \geq 2$.

Théorème 4.32. *On considère dans* $\mathbf{Mod}_R$*, le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "j"'] & C \arrow[r, "q"'] & C'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes. Alors, pour tout R-module B, le diagramme ci-bas commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_n^R(A', B) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"'] & \mathrm{Tor}_n^R(A, B) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "g_*"] & \mathrm{Tor}_n^R(A'', B) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "h_*"] & \mathrm{Tor}_{n-1}^R(A', B) \arrow[d, "f_*"] \\
\mathrm{Tor}_n^R(C', B) \arrow[r, "j_*"'] & \mathrm{Tor}_n^R(C, B) \arrow[r, "q_*"'] & \mathrm{Tor}_n^R(C'', B) \arrow[r, "\partial'_n"'] & \mathrm{Tor}_{n-1}^R(C', B).
\end{tikzcd}$$

Un théorème similaire avec $\mathrm{Tor}_n^R(A, \_)$ est aussi vrai.

Preuve Il s'agit d'une conséquence directe de la naturalité du Lemme du serpent. On pourrait aussi utiliser le Théorème 4.10 en combinaison avec Lemme 4.23. $\square$

4.5 Ext

Définition 4.33. Ext Covariant. Soit A est un R-module à droite. On considère le foncteur covariant $T = \mathrm{Hom}_R(A, \_)$. On définit

$$\mathrm{Ext}_R^n(A, \_) := R^n T.$$

Concrètement, si $\mathbf{E} = 0 \to B \xrightarrow{\eta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \to \ldots$ est une résolution injective de B, alors

$$\mathrm{Ext}_R^n(A,B) = H^n(\mathrm{Hom}_R\left(A, \mathbf{E}^B\right)) = \frac{\ker d_*^n}{\mathrm{im}\, d_*^{n-1}},$$

où $d_*^n : \mathrm{Hom}_R\left(A, E^n\right) \to \mathrm{Hom}_R\left(A, E^{n+1}\right),\ f \mapsto d^n f$.

Proposition 4.34. Si A est un R-module à droite, et B un R-module à droite, alors

$$\mathrm{Hom}_R\left(A,B\right) \simeq \mathrm{Ext}_R^0(A,B).$$

Corollaire 4.35. *Si $0 \to B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B'' \to 0$ est une suite exacte dans ${}_R\mathbf{Mod}$, alors*

$$0 \to \mathrm{Hom}_R\left(A,B'\right) \to \mathrm{Hom}_R\left(A,B\right) \to \mathrm{Hom}_R\left(A,B''\right)$$

$$\to \mathrm{Ext}_R^1(A,B') \to \mathrm{Ext}_R^1(A,B) \to \mathrm{Ext}_R^1(A,B'')$$

$$\to \mathrm{Ext}_R^2(A,B') \to \mathrm{Ext}_R^2(A,B) \to \mathrm{Ext}_R^2(A,B'') \to$$

Nous voyons que Ext représente le défaut d'exactitude, après avoir appliquer le foncteur $\mathrm{Hom}_R\left(A, \_\right)$ a une suite exacte courte.

Corollaire 4.36. *Si E est un R-module injectif et $n \geq 1$, alors*

$$\mathrm{Ext}_R^n(A,E) = \{0\}.$$

Corollaire 4.37. *Soit $B \in {}_R\mathbf{Mod}$ et $\boldsymbol{E} = 0 \to B \xrightarrow{\eta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \to$ une résolution injective de B. Si on définit $V_0 = \mathrm{im}\,\eta$, et $V_n = \mathrm{im}\, d^{n-1}$ pour tout $n \geq 0$, alors*

$$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,B) \simeq \mathrm{Ext}_R^n(A,V_0) \simeq \ldots \simeq \mathrm{Ext}_R^1(A,V_{n-1}).$$

Théorème 4.38. *On considère dans ${}_R$ le diagramme commutatif suivant où les lignes sont exactes :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & B'' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "j"'] & C \arrow[r, "q"'] & C'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Il y a un diagramme commutatif avec lignes exactes pour tout R-module B,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}_R^n(A,B') \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"'] & \mathrm{Ext}_R^n(A,B) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "g_*"] & \mathrm{Ext}_R^n(A,B'') \arrow[r, "\partial^n"] \arrow[d, "h_*"] & \mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,B') \arrow[d, "f_*"] \\
\mathrm{Ext}_R^n(A,C') \arrow[r, "j_*"'] & \mathrm{Ext}_R^n(A,C) \arrow[r, "q_*"'] & \mathrm{Ext}_R^n(A,C'') \arrow[r, "(\partial')^n"'] & \mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,C').
\end{tikzcd}$$

Preuve Il s'agit d'une conséquence directe de la naturalité du Lemme du serpent. On pourrait aussi utiliser le Théorème 4.10 en combinaison avec Lemme 4.23. $\square$

Définition 4.39. Ext Contravariant. Soit B est un R-module à gauche, et $T = \mathrm{Hom}_R\left(\_, B\right)$. Alors on définit $\mathrm{ext}_R^n(\_, B) := (R^n T)$.

Concrètement, si $\mathbf{P} = \ldots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$ est une résolution projective de A alors

$$\mathrm{ext}_R^n(A, B) = H^n(\mathrm{Hom}_R\left(\mathbf{P}_A, B\right)) = \frac{\ker d^{n*}}{\mathrm{im}\,(d^{n-1})^*},$$

où $d^{n*} : \mathrm{Hom}_R\left(P_{n-1}, B\right) \to \mathrm{Hom}_R\left(P_n, B\right),\ f \mapsto f d^n$.

Pour la suite, nous considérerons que les groupes $\mathrm{Ext}_R^n(A, B)$, car on peut montrer que

$$\mathrm{Ext}_R^n(A, B) \simeq \mathit{ext}_R^n(A, B).$$

Exemple 4.40. Calculons $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^k(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B)$ où B un groupe abélien, et $k \geq 2$. La suite

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{[n]} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

est une résolution projective de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\_, B\right)$ à cette suite on trouve

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{Z}, B\right) \xrightarrow{[n]^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{Z}, B\right) \to 0,$$

laquelle est isomorphe à $0 \to B \xrightarrow{[n]} B \to 0$. Ainsi on trouve

(i) $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B\right) \simeq B[n]$,

(ii) $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) \simeq B/nB$,

(iii) $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^k(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) = \{0\}$ si $k \geq 2$.

4.6 Cône d'un morphisme de complexes

Définition 4.41. Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $(\mathbf{C}, d)$ est un complexe de chaînes. On définit $\mathbf{C}[p]$ comme le complexe dont le n-ième terme est C_{n+p} et la n-ième différentielle est d_{n+p}.

Définition 4.42. Soit $f : (\mathbf{C}, d) \to (\mathbf{C}', d')$ est un morphisme de complexes, alors son **Cône** est le complexe $\mathbf{Cone}(f)$ défini tel que

(i) son n-ième terme est $\mathbf{Cone}(f)_n = C_{n-1} \oplus C'_n$,

(ii) sa n-ième différentielle $D_n : \mathbf{Cone}(f)_n \to \mathbf{Cone}(f)_{n-1}$ est définie par

$$D_n \begin{bmatrix} c_{n-1} \\ c'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_{n-1} & 0 \\ -f_{n-1} & d'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{n-1} \\ c'_n \end{bmatrix}.$$

Comme $\mathbf{C}$, et $\mathbf{C}'$ sont des complexes, et $f : (\mathbf{C}, d) \to (\mathbf{C}', d')$ est un morphisme de complexes, alors

$$D_n D_{n+1} = \begin{bmatrix} -d_{n-1} & 0 \\ -f_{n-1} & d'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_n & 0 \\ -f_n & d'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{n-1}d_n & 0 \\ f_{n-1}d_n - d'_n f_n & d'_n d'_{n+1} \end{bmatrix} = 0.$$

Ainsi $\mathbf{Cone}(f)$ est aussi un complexe.

Lemme 4.43. *Soit $f : (\mathbf{C}, d) \to (\mathbf{C}', d')$ est un morphisme de complexes. Alors on a la suite exacte courte suivante :*

$$0 \to \mathbf{C}' \xrightarrow{i} \mathbf{Cone}(f) \xrightarrow{j} \mathbf{C}[-1] \to 0, \tag{4}$$

où $i(c') = (0, c')$ et $j(c, c') = -c$. De plus, le morphisme connecteur

$$H_n(\mathbf{C}[-1]) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\mathbf{C}')$$

dans la suite exacte longue correspondante à (4) correspond au morphisme induit $f_* : H_{n-1}(\mathbf{C}) \to H_{n-1}(\mathbf{C}')$.

Preuve On $ji(c') = j(0, c') = 0$ et donc $\operatorname{im} i \subseteq \ker j$. Soit $(c, c') \in \ker j$. alors $c = 0$ et donc $(0, c') = i(c')$. Par conséquent, $\ker j = \operatorname{im} j$. La surjectivité de j et l'injectivité de i sont claires, ainsi (4) est exacte. On a $\partial_n(c_{n-1}) = i_{n-1}^{-1} D_n j_n^{-1}(c_{n-1})$ et donc

$$c_{n-1} \mapsto (-c_{n-1}, c'_n) \mapsto (-d_{n-1}(-c_{n-1}), d'_n c'_n - f_{n-1}(-c_{n-1})) \mapsto f_{n-1}c_{n-1}.$$

pour tout $c_{n-1} \in C_{n-1}$ et pour tout $n \geq 1$. Il suit que le morphisme connecteur de la suite exacte longue associée à (4) est f_*. □

Remarque 4.44. Il suit du Lemme 4.43 qu'un morphisme $f : (\mathbf{C}, d) \to (\mathbf{C}', d')$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si le complexe $\mathbf{Cone}(f)$ est exact.

4.7 Produit tensoriel de deux complexes

Convention Pour tout le restant du travail, l'anneau R sera supposé commutatif.

Définition 4.45. Soit $(\mathbf{C}, d)$, et $(\mathbf{C}', d')$ deux complexes dans ${}_R\mathbf{Mod}$. Le **produit tensoriel de deux complexes**, que l'on note $(\mathbf{C} \otimes_R \mathbf{C}', D)$, est défini par

$$(\mathbf{C} \otimes_R \mathbf{C}')_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes_R C_q,$$

et $D_n : (\mathbf{C} \otimes_R \mathbf{C}')_n \to (\mathbf{C} \otimes_R \mathbf{C}')_{n-1}$ est donné sur les tenseurs simples homogènes par

$$D_n : a_p \otimes b_q \mapsto d_p a_p \otimes b_q + (-1)^p a_p \otimes d'_q b_q$$

4.8 Complexes de Koszul

Définition 4.46. Soit $(\mathbf{C}, d)$ un complexe dans $\mathbf{Comp}({}_R\mathbf{Mod})$. Pour tout r dans R, le morphisme (multiplication) $\mu^r : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ défini par $\mu^r_n : C_n \to C_n$; $\mu^r_n(c_n) = rc_n$ est un morphisme de complexes .

Définition 4.47. Soit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. On fixe $x = [x_1, \ldots, x_n] \in R^n$, une suite ordonnée de n éléments de R. Nous définissons (construisons) le **complexe de Koszul** $(K(x))$ par induction sur n. Pour $n = 1$, on pose

$$K(x_1) := [\ 0 \to R \xrightarrow{[x_1]} R \to 0\ ].$$

Remarquons que la deuxième copie de R à droite est placée en degré zéro. Pour $n \geq 2$, si $K(x')$ est défini pour $x' = [x_1, \ldots, x_{n-1}]$, alors on définit $K(x)$ comme

$$K(x) = \mathbf{Cone}(\mu^{x_n} : K(x') \xrightarrow{[x_n]} K(x')).$$

Par le lemme 4.43, on a la suite exacte courte

$$0 \to K(x') \to \mathbf{Cone}(\mu^{x_n}) \to K(x')[-1] \to 0.$$

Ainsi, le complexe de Koszul $K(x)$ s'insère dans la suite exacte courte

$$0 \to K(x') \to K(x) \to K(x')[-1] \to 0.$$

Par la définition du cône d'un morphisme de complexes, on a

$$\begin{aligned} K_i(x) &= K_i(x') \oplus K_{i-1}(x') \\ K_{i-1}(x) &= K_{i-1}(x') \oplus K_{i-2}(x') \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

De la suite précédente, on peut extraire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_i(x') \arrow[r] \arrow[d] & K_i(x') \oplus K_{i-1}(x') \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} d_i & [x_n] \\ 0 & -d_{i-1} \end{pmatrix}"] & K_{i-1}(x') \arrow[r] \arrow[d, "-d_{i-1}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_{i-1}(x') \arrow[r, "i"] & K_{i-1}(x') \oplus K_{i-2}(x') \arrow[r] & K_{i-2}(x') \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où la différentielle du complexe $K(x')$ est notée par d.

Exemple 4.48. Soit $x_1 \in R$. Alors $K(x_1)$ est un complexe concentré en degré 0 et 1. Un calcul direct montre que

(1) $H_0(K(x_1)) = R/Rx_1$,

(2) $H_1(K(x_1)) = \mathrm{ann}_R(x_1) := \{r \in R : rx_1 = 0\} = ((0) : (x_1))$,

(3) $H_n(K(x_1)) = 0$ si $n \geq 2$.

Nous nous proposons maintenant de définir le complexe de Koszul d'une manière plus concrète.

Définition 4.49. Soit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. On fixe $x = [x_1, \ldots, x_n] \in R^n$. Nous définissons (construisons) le **complexe de Koszul** $(T(x))$ par induction sur n. Pour $n = 1$, on pose

$$T(x_1) = [0 \to R \xrightarrow{[x_1]} R \to 0].$$

Pour $n \geq 2$, si $T(x')$ est défini pour $x' = [x_1, \ldots, x_{n-1}]$, alors on définit $T(x)$ comme

$$T(x) = T(x_1) \otimes_R T(x_2) \otimes_R \cdots \otimes_R T(x_n).$$

Proposition 4.50. Soit $(\mathbf{C}, d)$ est un complexe et $y \in R$. Alors

$$K(y) \otimes_R \mathbf{C} = \mathbf{Cone}(\mathbf{C} \overset{[y]}{\to} \mathbf{C}).$$

Preuve Soit $\{1\}$ une base de $K(y)_0$ et $\{e\}$ une base de $K(y)_1$. Ainsi $K(y)_0 = K \cdot 1$ et $K(y)_1 = K \cdot e$. On définit, pour $i \geq 1$, le morphisme

$$\begin{aligned} \Psi_i : ((K(y))_1 \otimes C_{i-1}) \oplus (T(y)_0 \otimes C_i) &\to C_{i-1} \oplus C_i \\ \begin{pmatrix} e \otimes c_{i-1} \\ 1 \otimes c_i \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} c_{i-1} \\ c_i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme $K(y)$ est concentré en degrés 0 et 1, il suit que

$$K(y) \simeq \mathbf{Cone}(\mathbf{C} \overset{[y]}{\to} \mathbf{C})$$

est un isomorphisme de degré 0 en tant que groupe gradué. Il reste à vérifier que les différentielles coïncident, i.e., qu'il s'agit d'un morphisme de complexes. On notera par ∂ la différentielle du complexe $K(y)$. On rappelle que d correspond à la différentielle de $\mathbf{C}$. Par définition, la différentielle d' du complexe $K(y) \otimes_R \mathbf{C}$ est donnée par

$$\begin{aligned} d'_i : \bigoplus_{p+q=i} K_p(y) \otimes_R C_q &\to \bigoplus_{p+q=i-1} K_p(y) \otimes_R C_q \\ r_p \otimes c_q &\mapsto \partial_p(r_p) \otimes c_q + (-1)^p r_p \otimes d_q(c_q). \end{aligned}$$

Maintenant regardons la différentielle D de $\mathbf{Cone}(\mathbf{C} \xrightarrow{[y]} \mathbf{C})$. Nous avons

$$\begin{aligned} D_i : C_{i-1} \oplus C_i &\to C_{i-2} \oplus C_{i-1} \\ \begin{pmatrix} c_{i-1} \\ c_i \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -d_{i-1} & 0 \\ [y] & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{i-1} \\ c_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un calcul direct montre que

$$D_i\Psi_i\begin{pmatrix} e\otimes c_{i-1}\\ 1\otimes c_i\end{pmatrix} = D_i\begin{pmatrix} c_{i-1}\\ c_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_{i-1} & 0\\ [y] & d_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{i-1}\\ c_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_{i-1}c_{i-1}\\ d_ic_i + yc_{i-1}\end{pmatrix},$$

et

$$\Psi_{i-1}d'_i\begin{pmatrix} e\otimes c_{i-1}\\ 1\otimes c_i\end{pmatrix} = \Psi_{i-1}\Big(y\otimes c_{i-1} + (-1)\cdot e\otimes d_{i-1}c_{i-1} + 1\otimes d_ic_i\Big) = \begin{pmatrix} -d_{i-1}c_{i-1}\\ d_ic_i + yc_{i-1}\end{pmatrix}.$$

Le résultat suit. □

Proposition 4.51. Soit $x = [x_1, \dots, x_n] \in R^n$ et $n \geq 1$. Alors les définition des complexes de Koszul $K(x)$ et $T(x)$ sont équivalentes, i.e., $K(x) \simeq T(x)$.

Preuve Pour $n = 1$ on a clairement $T(x_1) = K(x_1)$. Soit $n \geq 2$ et $x' = [x_1, \dots, x_{n-1}]$. Supposons que $T(x') \simeq K(x')$. Alors, en utilisant la Proposition 4.50, nous obtenons

$$\begin{aligned} T(x) &= T(x') \otimes_R T(x_n)\\ &\simeq K(x') \otimes_R T(x_n)\\ &\simeq K(x') \otimes_R K(x_n)\\ &\simeq \mathbf{Cone}(K(x') \xrightarrow{[x_n]} K(x'))\\ &\simeq K(x). \end{aligned}$$

□

4.9 Complexe de Koszul associé à une suite régulière

Définition 4.52. Soit R un anneau et M un R-module. On définit une **suite** sur M, de longueur n, comme une collection ordonnée de n éléments de R. On notera une telle suite sur M par $[x_1, \dots, x_n] \in R^n$. Un élément $r \in R$ est dit M-régulier si l'application $[r] : M \to M$ est injective. Une suite ordonnée d'éléments $x = [x_1, \dots, x_n]$ dans R est dite **régulière sur** M (on dira aussi une M-suite régulière) si

(i) $M/(x_1, \dots, x_n)M \neq 0$.

(ii) Pour $i \geq 1$, x_i n'est pas un diviseur de 0 sur $M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$.

La suite $x = [x_1, \dots, x_n]$ est dite **maximale** sur M si $x' = [x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]$ n'est pas régulière sur M quelque soit $x_{n+1} \in R$.

Remarque 4.53. En général, si $[x_1, x_2] \in R^2$ est une suite régulière sur M alors $[x_2, x_1]$ n'est pas nécessairement une suite régulière sur M. Par exemple, on peut prendre l'anneau $R = k[x, y, z]/((x-1)z)$ et $M = R$. Alors $[x, (x-1)y]$ est une suite régulière sur R. Cependant, $[(x-1)y, x]$ n'est pas une suite régulière sur R, car $(x-1)y$ est un diviseur de zéro sur R.

Définition 4.54. Soit M un R-module et $x = [x_1, \dots, x_n] \in R^n$ une suite. On définit $K(x, M) := K(x) \otimes_R M$ où M est placé en degré zéro. En particulier, $K(x) = K(x, R)$. De plus, pour tout $p \geq 0$, on pose $K_p(x, M) := K(x, M)_p = (K(x) \otimes_R M)_p$.

Exemple 4.55. Soit M un R-module et soit $x_1 \in R$. Alors $K(x_1, M)$ est un complexe concentré en degré 0 et 1. Un caclul direct montre que

(1) $H_0(K(x_1, M)) = M/x_1M$,

(2) $H_1(K(x_1, M)) = \mathrm{ann}_M(x_1) = \ker([x_1] : M \to M)$,

(3) $H_n(K(x_1, M)) = 0$ si $n \geq 2$.

En général, $H_r(K([x_1, x_2, \dots, x_r], M)) = \{m \in M : x_i m = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, r\}$.

Proposition 4.56. Soit $[x_1, x_2] \in R^2$ une suite sur R (pas nécessairement régulière) telle que x_1 n'est pas un diviseur de zéro sur R. Alors $H_1(K(x_1, x_2)) = (x_1 : x_2)/(x_1)$. En particulier, si x_1 n'est pas un diviseur de zéro, alors $[H_1(K(x_1, x_2)) = 0 \iff [x_1, x_2] \text{ est } R\text{-régulière}]$.

Preuve Exercice. $\square$

Définition 4.57. Afin d'alléger la notation, de manière générale, si M est un R-module et $x = [x_1, \dots, x_n] \in R^n$ est une suite, on écrira $H_k(x, M)$ plutôt que $H_k(K(x, M))$ pour tout $k \geq 0$.

Soit $x = [x_1] \in R$ une suite de longueur un sur R et $\mathbf{C}$ un complexe de R-modules. On aimerait maintenant donner une relation précise entre les groupes d'homologie de $K(x, \mathbf{C})$ et $\mathbf{C}$.

Proposition 4.58. Soit $x \in R$. Pour tout $k \geq 0$ on a la suite exacte courte de R-modules suivantes :

$$0 \to H_0(x, H_k(\mathbf{C})) \to H_k(K(x) \otimes_R \mathbf{C}) \to H_1(x, H_{k-1}(\mathbf{C})) \to 0$$

Preuve L'injection naturelle $\iota : R \to K(x)$ (en degré 0) induit une injection de complexes

$$\mathbf{C} = R \otimes_R \mathbf{C} \to K(x) \otimes_R \mathbf{C}\,. \tag{5}$$

De manière similaire, la projection naturelle $\pi : K(X) \to K_1(x) \simeq R$ induit un homomorphisme de complexes

$$K(x) \otimes_R \mathbf{C} \to \mathbf{C}[-1]. \tag{6}$$

On obtient donc la suite exacte courte de complexes suivantes

$$0 \to \mathbf{C} \to K(x) \otimes_R \mathbf{C} \to \mathbf{C}[-1] \to 0.$$

La longue suite exacte en homologie nous donne

$$\ldots \to H_{p+1}(\mathbf{C}[-1]) \xrightarrow{\partial} H_p(\mathbf{C}) \to H_p(K(x) \otimes_R \mathbf{C}) \to H_p(\mathbf{C}[-1]) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(\mathbf{C}) \to \ldots \quad (7)$$

L'opérateur de bord $\partial : H_p(\mathbf{C}[-1]) = H_{p-1}(\mathbf{C}) \to H_{p-1}(\mathbf{C})$ n'est rien d'autre que la multiplication par x. De (7) on peut extraire la suite exacte courte suivante

$$0 \to X_p \to H_p(K(x) \otimes_R \mathbf{C}) \to Y_{p-1} \to 0$$

où

(i) $X_p = \operatorname{coker}(x : H_p(\mathbf{C}) \to H_p(\mathbf{C})) = H_0(x, H_p(\mathbf{C}))$,

(ii) $Y_p = \ker(x : H_p(\mathbf{C}) \to H_p(\mathbf{C})) = H_1(x, H_p(\mathbf{C}))$.

Le résultat suit. $\square$

Proposition 4.59. Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien et $x, y \in \mathfrak{m}$. Alors $H_1(K(x_1, x_2)) = 0$ si et seulement si $[x_1, x_2]$ est une R-suite régulière.

Preuve ($\Leftarrow$) Comme $[x_1, x_2]$ est R-suite régulière, il suit de la Proposition 4.56 que $H_1(K(x_1, x_2)) = 0$.

($\Rightarrow$) En posant $\mathbf{C} = K(x_1)$ et $x = x_2$ dans (7) on peut extraire la suite exacte

$$H_2(K(x_1)) \xrightarrow{[x_2]} H_2(K(x_1)) \to H_1(K(x_1, x_2)) = 0$$

En particulier, on doit avoir $\operatorname{ann}_R(x_1) = x_2 \operatorname{ann}_R(x_1)$. Par le lemme de Nakayama, ceci implique que $\operatorname{ann}_R(x_1) = \{0\}$ et donc, x_1 n'est pas un diviseur de zéro. Finalement, par la Proposition 4.56, il suit que $[x_1, x_2]$ est R-régulière. $\square$

Proposition 4.60. Soit R un anneau local noethérien. Si $x = [x_1, \ldots, x_n]$ est une R-suite régulière, alors toute permutation de x est encore une R-suite régulière.

Preuve Commençons par faire la preuve quand $r = 2$. Les complexes $K(x_1, x_2)$ et $K(x_2, x_1)$ sont isomorphes. Ainsi si $[x_1, x_2]$ est R-régulière, $H_1(x_1, x_2) = 0$ et donc $H_1(K(x_2, x_1)) = 0$. Par la Proposition 4.59, il suit que $[x_2, x_1]$ est R-régulière. Finalement, le résultat suit par induction sur r. $\square$

Définition 4.61. Un complexe $\mathbf{C}$ est dit **acyclique sur** M si $H_0(\mathbf{C}) = M$ et $H_p(\mathbf{C}) = 0$ si $p \geq 1$. Ainsi un tel complexe $\mathbf{C}$ correspond à une suite exacte de la forme suivante

$$\ldots \to C_n \to C_{n-1} \to \ldots \to C_1 \to C_0 \to M \to 0.$$

Corollaire 4.62. *Soit* $\mathbf{C}$ *un complexe acyclique sur* M. *Soit* x_1 *un élément* M*-régulier. Alors le complexe* $K(x_1, \mathbf{C}) = K(x_1) \otimes_R \mathbf{C}$ *est acyclique sur* M/x_1M.

Preuve De la Proposition 4.58 on tire que

(i) $H_p(K(x_1, \mathbf{C})) = 0$ si $p \geq 2$,

(ii) $H_1(K(x_1, \mathbf{C})) = H_1(x_1, M) = \ker([x_1] : M \to M) = \{0\}$ (car x_1 est M régulier),

(iii) $H_0(K(x_1, \mathbf{C})) = H_0(x_1, M) = M/x_1M$.

Le résultat suit. □

En itérant le Corollaire 4.62 on obtient immédiatement

Corollaire 4.63. *Soit* $\mathbf{C}$ *un complexe acyclique sur* M*. Soit* $x = [x_1, \ldots, x_n]$ *une suite régulière sur* M*. Alors le complexe* $K(x, \mathbf{C})$ *est acyclique sur* $M/(x_1, \ldots, x_n)M$*.*

Proposition 4.64. Soit $[x_1, \ldots, x_r] \in R^n$ une suite régulière sur M. Alors $H_p(x, M) = 0$ si $p \geq 1$.

Preuve Si $p = 1$ alors $H_1(x_1, M) = \mathrm{ann}_M(x_1) = \{0\}$. Donc la proposition est vraie. Supposons que $p > 1$ et que la proposition ait été montrée pour tous les complexes $K(x_1, \ldots, x_{r-1}, M)$ où $[x_1, \ldots, x_{r-1}]$ est une M-suite régulière. On considère la projection canonique

$$\pi : K_0(x_1, \ldots, x_{r-1}, M) \to H_0(x_1, \ldots, x_{r-1}, M) = M/(x_1, \ldots, x_{r-1})M := \overline{M}.$$

Par hypothèse, $K(x_1, \ldots, x_{r-1}, M)$ est un complexe acyclique sur $M/(x_1, \ldots, x_{r-1})M$. En vertu de la Corollaire 4.63, on trouve donc que $K(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r, M) = K(x_1, \ldots, x_{r-1}, M) \otimes K(x_r)$ est un complexe acyclique sur $\overline{M}/x_r\overline{M} \simeq M/(x_1, \ldots, x_r)M$. Le résultat suit. □

Proposition 4.65. Soit R un anneau local et noethérien. Soit M un R-module de type fini et $x = [x_1, \ldots, x_n] \in R$ une M-suite. Alors les énoncés suivants sont équivalents

(i) x est une M-suite,

(ii) $H_p(x, M) = 0$ pour $p \geq 1$,

(iii) $H_1(x, M) = 0$.

Preuve Exercice. □

4.10 Fonctorialité du complexe de Koszul

Soit $x = [x_1, \ldots, x_n] \in R^n$ une suite de R. Alors le foncteur $\mathcal{F} : {}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Comp}({}_R\mathbf{Mod})$, $M \mapsto K(x, M)$ est exact (ceci provient tout simplement de la commutativité entre la somme directe et le produit tensoriel). Ainsi, si

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$

est une suite exacte courte alors

$$0 \to K(x, M') \to K(x, M) \to K(x, M'') \to 0, \tag{8}$$

est encore une suite exacte courte. De (8), on peut évidemment extraire la longue suite exacte en homologie. De plus, on a un isomorphe naturel $\varphi : H_0(x, M) \to (R/x) \otimes_R M = \mathrm{Tor}_0^R(R/x, M)$ où $R/x = R/(x_1, \ldots, x_n)$. Il suit donc du formalisme axiomatique d'Eilenberg-Steenrod qu'il existe une unique transformation naturelle $\phi : H_i(x, M) \to \mathrm{Tor}_i^R(R/x, M)$ qui prolonge φ.

4.11 Résolution libre minimale

Pour toute cette sous-section on suppose que $(R, \mathfrak{m})$ est un anneau local et noethérien. La notion de résolution libre minimale est la notion "clé originale" qui permettra de montrer le critère de Serre pour les anneaux locaux, noethériens réguliers.

Définition 4.66. Soit L et M des R-modules où L est R-libre. Soit $u : L \to M$ un R-homomorphisme. Alors on dit que u est minimal si les conditions suivantes sont satisfaites

1. u est surjectif,
2. $\ker(u) \subseteq \mathfrak{m}L$.

Remarquons que par le lemme de Nakayama, ceci est équivalent à dire que $\overline{u} : \overline{L} \to \overline{M}$ est bijective où le symbole $^-$ correspond à la réduction modulo $\mathfrak{m}$.

Définition 4.67. Soit

$$\to L_n \overset{d_n}{\to} L_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\to} L_{n-2} \to \ldots \overset{d_1}{\to} L_0 \overset{d_{-1}}{\to} M \to 0$$

une résolution libre de M. On dit que $\mathbf{L}$ est une résolution minimale si les applications $L_i \to \ker(d_{i-1})$ sont minimales pour $i \geq 0$.

Proposition 4.68. Soit M un R-module de type fini. Alors M admet une résolution libre minimale.

Preuve Exercice. $\square$

Proposition 4.69. Soit $[x_1, \ldots, x_n]$ une suite R-régulière. En particulier, $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{m}$. Alors $K(x_1, \ldots, x_n)$ est une résolution libre minimale de $R/(x_1, \ldots, x_n)$.

Preuve Le fait que $K(x_1, \ldots, x_n)$ est un complexe libre provient directement de la définition de $K(x_1, \ldots, x_n)$. Le fait que ce complexe est exact est une conséquence de la Proposition 4.64. Finalement, le fait que le complexe est minimal provient de l'observation que $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{m}$. $\square$

Nous aurons besoin du lemme technique suivant :

Lemme 4.70. *Soit* $(R, \mathfrak{m}, k)$ *un anneau local , A un R-module de type fini et*

$$\ldots \to L_2 \xrightarrow{d_2} L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} A \to 0$$

une résolution minimale $\mathbf{L}$ *de* M*. Soit*

$$\ldots \to M_2 \xrightarrow{D_2} M_1 \xrightarrow{D_1} M_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0,$$

un complexe $\mathbf{M}$ *satisfaisant les propriétés suivantes :*

(i) chaque M_i *est un* R*-module libre de type fini*

(ii) $\bar{\varepsilon} : M_0/\mathfrak{m}M_0 \to A/\mathfrak{m}A$ *est injectif.*

(iii) Pour tout $i \geq 0$*, on a* $D_i(M_i) \subseteq \mathfrak{m}M_{i-1}$*, et* $\tilde{D}_i : M_i/\mathfrak{m}M_i \to \mathfrak{m}M_{i-1}/\mathfrak{m}^2M_{i-1}$, $u_i + \mathfrak{m}M_i \mapsto D_i(u_i) + \mathfrak{m}^2M_{i-1}$ *est une injection.*

Comme $\mathbf{M}$ *est exact et* $\mathbf{L}$ *est libre, l'identité* $\mathrm{Id}_M : M \to M$ *peut être étendue en un homomorphisme de complexes* $f : \mathbf{M} \to \mathbf{L}$*. Alors,* f *est injective et identifie* $\mathbf{M}$ *comme un facteur direct de* $\mathbf{L}$*. En particulier, l'application canonique* $H_i(\mathbf{M} \otimes_R k) \to \mathrm{Tor}_i^R(M, k)$ *est injective pour* $i \geq 0$*.*

Preuve Voir l'Appendice 1 de [13]. □

5 Dimensions

5.1 Dimension projective d'un module

Définition 5.1. La **dimension projective** $\mathrm{pd}_R(M)$ d'un R-module ${}_RM$, notée par $\mathrm{pd}_R(M)$, est le plus petit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel qu'il existe une résolution projective finie

$$0 \to P_n \to \cdots P_0 \to M \to 0$$

de M. Si M n'admet aucune résolution projective finie, alors on définit $\mathrm{pd}_R(M) := \infty$.

Théorème 5.2. *Soit* M *est un* R*-module. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\mathrm{pd}_R(M) \leq n$*.*

(2) $\mathrm{Ext}_R^i(M, N) = 0$ *pour tout* $i > n$*, et tout* R*-module* N*.*

(3) $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M, N) = 0$ *pour tout* R*-module* N*.*

(4) Si $0 \to K \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \to M \to 0$ *est une suite exacte avec tous les* X_i *projectifs, alors nécessairement* K_{n-1} *est projectif.*

Preuve Exercice. □

Exemple 5.3.

(i) $\operatorname{pd}_R(M) = 0$ si est seulement si M est projectif.

(ii) Soit R est un domaine à idéaux principaux, qui n'est pas un corps et M un R-module quelconque. Alors $\operatorname{pd}_R(M) \leq 1$: En effet, pour tout R-module M, il existe une suite exacte $0 \to K \to F \to M \to 0$ avec F libre et K un sous-module d'un module libre. Comme R est un DIP, il suit que K est libre. Ainsi $\operatorname{pd}_R(M) \leq 1$. $\square$

Théorème 5.4. *Soit $(R, \mathfrak{m}, k)$ et un anneau local noethérien et M un R-module de type fini. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\operatorname{pd}_R(M) \leq n$.

(ii) $\operatorname{Tor}_i^R(M, N) = 0$ *pour tout $i > n$, et tout R-module N.*

(iii) $\operatorname{Tor}_{n+1}^R(M, N) = 0$ *pour tout R-module N.*

Preuve Exercice. $\square$

Définition 5.5. Soit R est un anneau. On définit la **dimension projective globale à gauche** de R comme étant

$$\ell\text{-gl proj dim}(R) := \sup\{\operatorname{pd}_R(M) : M \in \operatorname{obj}({}_R\mathbf{Mod})\}.$$

Il résulte directement de la définition de ℓ-gl proj dim(R) que

Corollaire 5.6. ℓ-gl proj dim$(R) \leq n$ *si et seulement si* $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(M, N) = 0$ *pour tout R-modules M et N.*

Théorème 5.7. *Soit R un anneau. Alors*

$$\ell\text{-gl proj dim}(R) := \sup\{\operatorname{pd}_R(R/I) : I \textit{ est un idéal à gauche}\}.$$

Preuve Voir Théorème 11.134 de [11]. $\square$

5.2 Dimension injective d'un module

Définition 5.8. Soit N un R-module. La **dimension injective** d'un R-module ${}_RN$,notée par $\operatorname{id}_R(M)$, est le plus petit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel qu'il existe une résolution injective finie

$$0 \to N \to E^0 \to E^1 \to \cdots \to E^n \to 0$$

de N. Si N n'admet aucune résolution injective finie, alors on pose $\operatorname{id}_R(N) := \infty$.

Exemple 5.9.

(i) $\operatorname{id}_R(N) = 0$ si et seulement si N est injectif.

Théorème 5.10. *Si N est un R-module, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{id}_R(N) \leq n$.

(ii) $\mathrm{Ext}^i_R(M, N) = 0$ *pour tout* $i > n$, *et tout* R*-module* M.

(iii) $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, N) = 0$ *pour tout* R*-module* M.

(iv) Si $0 \to N \to X_0 \to \cdots \to X_{n-1} \to Q \to 0$ *est une suite exacte avec tous les* X_i *injectifs , alors nécessairement* Q *est injectif.*

Preuve Exercice. □

Définition 5.11. Soit R un anneau commutatif, local et noethérien. On dit que R est un anneau de Gorenstein à gauche si ${}_RR$ (R vu comme R-module à gauche) a une dimension injective finie.

Remarque 5.12. On montrera, à la Section 6, qu'un anneau R commutatif, local, noethérien et régulier est nécessairement Gorenstein.

5.3 Dimension plate d'un module

Définition 5.13. La **dimension plate** d'un R-module ${}_RM$, notée par $\mathrm{fd}_R(M)$, est définie comme le plus petit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel qu'il existe une résolution plate finie $0 \to F_n \to \cdots F_0 \to M \to 0$ de M. Si M n'a aucune résolution plate finie, alors $\mathrm{fd}_R(M) = \infty$.

Théorème 5.14. *Soit M est un R-module. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{fd}_R(M) \leq n$.

(ii) $\mathrm{Tor}^R_i(M, N) = 0$ *pour tout* $i > n$, *et tout* R*-module* N.

(iii) $\mathrm{Tor}^R_{n+1}(M, N) = 0$ *pour tout* R*-module* N.

(iv) Si $0 \to K_{n-1} \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \to M \to 0$ *est une suite exacte avec tous les* X_i *plats, alors* K_{n-1} *est plat.*

Preuve Exercice. □

Le théorème suivant permet de relier la dimension plate à l a dimension projective dans un cas particulier d'intérêt.

Théorème 5.15. *Soit R un anneau commutatif et noethérien. Soit M un R-module de type fini. Alors* $\mathrm{pd}(M) = \mathrm{fd}(M)$.

Preuve Voir le Théroème 11.146 de [11]. □

5.4 Dimension globale à gauche d'un anneau

Théorème 5.16. *Pour tout anneau R, Nous avons*

$$\ell\text{-gl inj dim}(R) = \ell\text{-gl proj dim}(R).$$

Preuve Voir la Section 11.3 de [11]. $\square$

Définition 5.17. Soit R est un anneau. Alors sa **dimension globale à gauche** ℓ-gl dim(R) est définie par

$$\ell\text{-gl dim}(R) := \ell\text{-gl proj dim}(R) = \ell\text{-gl inj dim}(R).$$

Dans le cas où l'anneau R est commutatif, alors il n'y a pas de distinction à faire entre la gauche et la droite. Dans ce cas, on posera

$$D(R) := \ell\text{-gl dim}(R).$$

Hypothèse : Pour le reste du travail, on supposera que l'anneau R est commutatif.

5.5 Dimension de Krull

Définition 5.18. Une **chaîne d'idéaux premiers** de **longueur** n dans un anneau commutatif R est une chaîne d'inclusions strictement décroissantes

$$\mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_n.$$

Notons que la longueur de la chaîne correspond au nombre d'idéaux dans celle-ci moins un. Si R est un anneau commutatif, alors sa **dimension de Krull**, notée par $\dim(R)$, est la longueur de la plus longue chaîne d'idéaux premiers dans R. Si R admet des chaînes d'idéaux premiers arbitrairement longues, alors on pose $\dim(R) = \infty$.

Exemple 5.19.

(i) Si k est un corps alors $\dim(k) = 0$.

(ii) Si R est un DIP alors $\dim R = 1$.

(iii) Soit R un anneau noethérien et $\{x_1, \ldots, x_n\}$ des variables. Alors $\dim(R[x_1, \ldots, x_n]) = \dim R + n$.

Définition 5.20. Soit R est un anneau commutatif, et M un R-module. Alors la dimension de Krull de M est définie par

$$\dim(M) := \dim_R(M) := \dim(R/\operatorname{ann}_R(M)).$$

Définition 5.21. Soit $P \subseteq R$ un idéal premier. On définit $\operatorname{ht}(P)$, la hauteur de P, comme $\dim(A_P)$.

5.6 Profondeur d'un module

Lemme 5.22. *Soit A et B des R-modules et $I = \operatorname{ann}_R(A)$.*

(i) Supposons que I contienne un élément B-régulier, alors $\operatorname{Hom}_R(A, B) = \{0\}$.

(ii) Réciproquement, supposons que R soit noethérien et que A et B soient des R-modules de type fini sur R tels que $\operatorname{Hom}_R(A, B) = 0$. Alors I contient un élément B-régulier.

Preuve (i) Soit $r \in \operatorname{ann}(A)$. Alors $ra = 0$ pour tout $a \in A$. Ainsi pour tout $f \in \operatorname{Hom}_R(A, B)$, on a $0 = f(ra) = rf(a)$ pour tout $a \in A$. Supposons de plus que r soit B-régulier. Alors $rf(a) = 0$ implique que $f(a) = 0$ pour tout $a \in A$. Il suit donc que $f = 0$. $\square$

(ii) Supposons le contraire. Alors $\operatorname{ann}(A) \subseteq \operatorname{DZ}(B)$ où

$$\operatorname{DZ}(B) = \{r \in R : \exists b \in B \backslash \{0\}, rb = 0\}.$$

Par hypothèse, on a $\operatorname{ann}(A) \subseteq \operatorname{DZ}(B) = \bigcup_{i=1}^{r} P_i$, où les $P_i \subseteq R$ sont les idéaux premiers associés de B. La deuxième égalité utilise le fait que B est un module de type fini sur un anneau noethérien, voir [9]. Par le lemme dévitement pour les premiers, on sait qu'il existe $P := P_{i_0}$, pour un certain i_0, tel que $\operatorname{ann}(A) \subseteq P$. Nous affirmons que $A_P \neq \{0\}$. On sait que $A = Ra_1 + \dots Ra_n$. Par conséquent, il existerait $s_i \in R \backslash P$ tels que $s_i a_i = 0$ et $s_i \notin P$. Mais alors $s = \prod s_i \in \operatorname{ann}(A) \subseteq P$; contradiction.

Ainsi $A_P \neq \{0\}$. On désire maintenant montrer que $\operatorname{Hom}_R(A, B) \neq \{0\}$. Il est donc suffisant de montrer que $\operatorname{Hom}_{R_P}(A_P, B_P) \neq \{0\}$. On peut donc supposer que (R, P, k) est un anneau local avec P pour idéal maximal et k pour corps résiduel. Comme P est un idéal premier associé à B, il existe $b \in B$ tel que $\operatorname{ann}(b) = P$ et $Rb \simeq R/P$. Ainsi il existe une application non-triviale $k \to B$ donnée par $1 \mapsto b$. Comme $A_P \neq \{0\}$, le lemme de Nakayama implique que $A \neq PA$. Comme A/PA est un k-espace vectoriel non-trivial, il existe une flèche non-triviale $A \to A/PA \to k \to B$. Ainsi $\operatorname{Hom}_R(A, B) \neq \{0\}$. $\square$

Le prochain lemme permet de faire un lien entre les n-extensions et les suites régulières.

Lemme 5.23. *Soit R un anneau commutatif, A et B des R-modules et $[x_1, \dots, x_n] \in R^n$ une suite B-régulière incluse dans $\operatorname{ann}(A)$. Posons $I = (x_1, \dots, x_n)$. Alors*

$$\operatorname{Hom}_R(A, B/IB) \simeq \operatorname{Ext}_R^n(A, B).$$

Preuve la preuve est par induction sur n. On définit $I = (0)$ dans le cas où $n = 0$. Dans ce cas $\operatorname{Hom}_R(A, B) \simeq \operatorname{Ext}_R^0(A, B)$ par 4.34. Pour $n \geq 1$, posons $I = (x_1, \dots, x_{n+1})$, $J = (x_1, \dots, x_n)$, et supposons que $x_1, \dots, x_{n+1}$ est une suite B-régulière dans $ann(A)$. Nous avons la suite exacte $0 \to B \xrightarrow{[x_1]} B \to B/x_1B \to 0$. La suite exacte longue qui lui est associée est

$$\operatorname{Ext}_R^n(A, B) \xrightarrow{[x_1]_*} \operatorname{Ext}_R^n(A, B) \to \operatorname{Ext}_R^n(A, B/x_1B) \xrightarrow{\partial} \operatorname{Ext}_R^{n+1}(A, B) \xrightarrow{[x_1]_*} \operatorname{Ext}_R^{n+1}(A, B).$$

Comme $x_1 \in \operatorname{ann}(A)$, et que la multiplication commute avec les R-morphismes, $(x_1)_* = 0$ et il ne reste que :

$$0 \to \operatorname{Ext}^n_R(A, B) \xrightarrow{\psi} \operatorname{Ext}^n_R(A, B/x_1B) \to \operatorname{Ext}^{n+1}_R(A, B) \to 0.$$

Par l'hypothèse de l'induction, la multiplication $B/JB \xrightarrow{[x_{n+1}]} B/JB$ est injective vu que x_{n+1} est B/JB-régulier. Par l'exactitude de $\operatorname{Hom}_R(A, \_)$ à gauche, nous avons

$$\operatorname{Hom}_R(A, B/JB) \xrightarrow{[x_{n+1}]_*} \operatorname{Hom}_R(A, B/JB)$$

est injective. Or $x_{n+1} \in \operatorname{ann}(A)$; par conséquent $[x_{n+1}]_* = 0$. Ceci implique que $\operatorname{Hom}_R(A, B/JB) = \{0\}$. Comme $\operatorname{Hom}_R(A, B/JB) \simeq \operatorname{Ext}^n_R(A, B)$ par l'hypothèse de l'induction $\operatorname{Ext}^n_R(A, B) = 0$, alors

$$\operatorname{Ext}^n_R(A, B/x_1B) \xrightarrow{\partial} \operatorname{Ext}^{n+1}_R(A, B)$$

est un isomorphisme. Par induction, si $B' = B/x_1B$, alors

$$\operatorname{Hom}_R(A, B'/(x_2, \ldots, x_{n+1})B') \simeq \operatorname{Ext}^n_R(A, B/x_1B)$$

et par le troisième théorème d'isomorphisme nous obtenons finalement

$$\operatorname{Hom}_R(A, B/IB) \simeq \operatorname{Ext}^n_R(A, B).$$

□

Proposition 5.24. (**D.Rees.**) Soit R un anneau noethérien. Soit $I \subseteq R$ un idéal et B un R-module de type fini sur R tel que $IB \neq B$. Alors toutes les suites B-régulières maximales dans I ont la même longueur à savoir

$$g = \min\{i : \operatorname{Ext}^i_R(R/I, B) \neq 0\}.$$

Preuve Soit $x_1, \ldots, x_g$ une suite B-régulière maximale dans I. Pour tout $i = 1, 2, \ldots, g$, définissons $I_i = (x_1, \ldots, x_{i-1})$ avec $I_1 = (0)$. Notons que x_i est un élément (B/I_iB)-régulier. Par le Lemme 5.23

$$\operatorname{Ext}^{i-1}_R(R/I, B) \simeq \operatorname{Hom}_R(R/I, B/I_iB) = 0$$

(vu que $I_i \subset I = \operatorname{ann}(R/I)$). Comme $x_1, \ldots, x_g$ est une suite B-régulière maximale dans I, l'idéal I ne contient aucun élément (B/IB)-régulier, et donc par le Lemme 5.22

$$\operatorname{Ext}^g_R(R/I, B) \simeq \operatorname{Hom}_R(R/I, B/IB) \neq \{0\}.$$

□

Définition 5.25. Soit R un anneau noethérien et $I \subseteq R$ un idéal. Soit B un R-module de type fini sur R tel que $IB \neq B$. On définit le **grade** de B dans I par

$$G(I, B) := \text{la longueur maximale des suites } B\text{-régulieres dans } I.$$

Soit $(R, \mathfrak{m})$ est un anneau local noethérien. Alors on définit

$$\operatorname{depth}_R(B) = \operatorname{depth}(B) := G(\mathfrak{m}, B),$$

lequel invariant est appelé la **profondeur** de B.

Exemple 5.26. (i) $\mathbb{Z}_{(p)}$ est la localisation de $\mathbb{Z}$ par rapport à l'idéal premier (p). Il s'agit d'un anneau local noethérien commutatif, avec $p\mathbb{Z}_{(p)}$ comme idéal maximal. On a $\operatorname{depth}(\mathbb{Z}_{(p)}) = 1$.

(ii) Soit k un corps et $A := k[x_1, \ldots, x_n]$ où $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$. Alors A est un anneau local noethérien. On a $\operatorname{depth}(A) = n$.

La prochaine proposition nous permet de relier la profondeur d'un module à sa dimension (dimension de Krull).

Proposition 5.27. Soit R un anneau commutatif.

(i) Soit $x \in R$ un non-diviseur de zéro. Alors x n'appartient à aucun idéal premier minimal de R.

(ii) Soit $\mathfrak{p}$ est un idéal premier dans R et $x \in \mathfrak{p}$ un non-diviseur de zéro. Alors

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}/(x)) \leq \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) - 1.$$

(iii) Soit $\mathfrak{p} \subseteq R$ un idéal premier qui contient une suite R-régulière $[x_1, \ldots, x_d] \in R^d$. Alors

$$d \leq \operatorname{ht}(\mathfrak{p}).$$

Preuve

(i) Par contradiction. Supposons que x soit un diviseur de zéro tel que $x \in \mathfrak{p}$ tel que $\mathfrak{p}$ est premier minimal. Alors $\frac{x}{1} \in R_{\mathfrak{p}}$ qui contient qu'un unique idéal premier, à savoir $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$. On a $\frac{x}{1} \in \mathfrak{p} = \sqrt{(\frac{0}{1})}$, le nilradical de $R_{\mathfrak{p}}$. Ainsi $\frac{x}{1}$ est nilpotent. Par conséquent, $(\frac{x}{1})^m = 0$ dans $R_{\mathfrak{p}}$. Ainsi, il existe $r \notin \mathfrak{p}$ (donc $r \neq 0$) tel que $rx^m = 0$. Or x est non-diviseur de zéro dans R. Par conséquent $r = 0$. Contradiction.

(ii) Soit $h = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}/(x))$. Alors il existe une chaîne d'idéaux premiers dans $R/(x)$ de la forme

$$\mathfrak{p}/(x) \supsetneq \mathfrak{p}_1/(x) \supsetneq \ldots \mathfrak{p}_h/(x).$$

Ainsi, il existe une chaines d'idéaux premiers $\mathfrak{p} \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \ldots \mathfrak{p}_h$ avec $\mathfrak{p}_h \supseteq (x)$. Comme x est non-diviseur de zéro, (i) implique $\mathfrak{p}_h$ n'est un ideal premier minimal. L'inégalité suit.

(iii) Par induction sur $d \geq 1$. Pour $d = 1$, si $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 0$, alors $\mathfrak{p}$ est premier minimal. Par le (i), il suit que $x_1 \in \mathfrak{p}$ est un diviseur de zéro. Or cela contredit la régularité de la suite $x = [x_1, \ldots, x_d]$. Supposons le résultat vrai pour les suites régulières de R de longueur $d - 1$. Par hypothèse, l'idéal premier $\mathfrak{p}$ contient la suite R-régulière $[x_1, \ldots, x_d]$. Ainsi l'idéal premier $\mathfrak{p}/(x)$ de $R/(x)$ contient la suite $R/(x)$-régulière $[\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_d]$. Par l'hypothèse d'induction, $d - 1 \leq \operatorname{ht}(\mathfrak{p}/(x))$. Par (ii), $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}/(x)) \leq \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) - 1$. Donc $d \leq \operatorname{ht}(\mathfrak{p})$.

□

Corollaire 5.28. *Soit* $(R, \mathfrak{m})$ *un anneau local. Alors* $\operatorname{depth}(R) \leq \dim(R)$.

L'inégalité ci-haut motive la définition suivante :

Définition 5.29. Un **anneau de Cohen-Macaulay** est un anneau local noethérien $(R, \mathfrak{m})$ tel que

$$\dim(R) = \operatorname{depth}(R).$$

La prochaine proposition donne un lien exact entre la profondeur d'un module et sa dimension projective. En particulier, ceci nous permettra de relier la profondeur de R à sa dimension globale.

Proposition 5.30. (**Auslander-Buchsbaum.**) Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien et B un R-module de type fini avec $\operatorname{pd}_R(B) = n < \infty$. Alors

$$\operatorname{pd}_R(B) + \operatorname{depth}(B) = \operatorname{depth}(R).$$

Preuve Par induction sur $n = \operatorname{pd}_R(B) \geq 0$. Si $n = 0$, alors B est R-module de type fini projectif, alors par 2.35 B est libre. comme $B \simeq \bigoplus_{j=1}^m R_j$ ou $R_j \simeq R$, et comme Ext est additif, $\operatorname{Ext}_R^q(k, B) \simeq \bigoplus_{j=1}^m \operatorname{Ext}_R^q(k, R)$ pour tout q, ($k = R/\mathfrak{m}$ est le corps résiduel) , donc $\operatorname{depth}(B) = \operatorname{depth}(R)$. Nous avons une suite exacte

$$0 \to K \to F \to B \to 0,$$

où F est un R-module libre de type fini. Sa suite exacte longue est

$$\operatorname{Ext}_R^i(k, F) \to \operatorname{Ext}_R^i(k, B) \to \operatorname{Ext}_R^{i+1}(k, K) \to \operatorname{Ext}_R^{i+1}(k, F)$$

par le lemme 5.22 $\operatorname{Ext}_R^0(k, F) \simeq \operatorname{Hom}_R(k, F) = \{0\}$, comme F est libre, $\operatorname{Ext}_R^i(k, F) = \{0\}$ pour tout $i > 0$, par conséquent $\operatorname{Ext}_R^i(k, B) \simeq \operatorname{Ext}_R^{i+1}(k, K)$, et donc

$$\operatorname{depth}(K) = \operatorname{depth}(B) + 1.$$

Comme $n = \operatorname{pd}_R(B) > 0$, B n'est pas projectif, et $\operatorname{pd}_R(K) = n - 1$. Par l'hypothèse de l'induction $\operatorname{pd}_R(K) + \operatorname{depth}(K) = \operatorname{depth}(R)$. Donc

$$\operatorname{depth}(R) = \operatorname{pd}_R(K) + \operatorname{depth}(K) = \operatorname{pd}_R(K) + 1 + \operatorname{depth}(K) - 1 = \operatorname{pd}_R(B) + \operatorname{depth}(B)$$

□

Corollaire 5.31. *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien de dimension globale finie $D(R)$. Alors*

$$D(R) \leq \operatorname{depth}(R).$$

Preuve Par la Proposition 5.30 on a que $\operatorname{pd}(M) \leq \operatorname{depth}(R)$ pour tout R-module M de type fini. Par le Théorème 5.7, on trouve donc que $D(R) \leq \operatorname{depth}(R)$. □

6 Applications aux anneaux locaux noethériens réguliers

6.1 Anneaux locaux noethériens

Proposition 6.1. Soit $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local noethérien.

(i) Les éléments $x_1, \ldots, x_d$ forment un ensemble générateur minimal de $\mathfrak{m}$ si et seulement si les classes $\bar{x}_i = x_i + \mathfrak{m}$ forment une base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

(ii) Tous les ensembles générateurs minimaux de $\mathfrak{m}$ ont le même nombre d'éléments à savoir $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.

Preuve

(i) Soit $x_1, \ldots, x_d$ un ensemble minimal de générateurs de $\mathfrak{m}$. En particulier, l'ensemble $\bar{X} = \{\bar{x_1}, \ldots, \bar{x_d}\}$ engendre $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Supposons que $\bar{X}$ est linéairement dépendant. Alors il existe un indice i tel que $\bar{x}_i = \sum_{j \neq i} r'_j \bar{x}_j$, où $r'_j \in k$. En particulier, on a $x_i \in \sum_{j \neq i} r_j x_j + \mathfrak{m}^2$. Posons $B = \sum_{j \neq i} R x_j$. Alors $B + \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$. On a

$$\mathfrak{m}(\mathfrak{m}/B) = (B + \mathfrak{m}^2)/B = \mathfrak{m}/B.$$

Par le lemme de Nakayama $\mathfrak{m}/B = 0$, et donc $\mathfrak{m} = B$. Cela contredit la minimalité de d. Inversement, soit $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_d\}$ une base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, où $\bar{x}_i = x_i + \mathfrak{m}^2$. Posons $A = \sum_j R_j x_j$. Si $y \in \mathfrak{m}$, alors $\bar{y} = \sum r'_i \bar{x}_i$ pour certains $r'_i \in k$. Par conséquent, $y \in A + \mathfrak{m}^2$. Comme $\mathfrak{m} = A + \mathfrak{m}^2$ il suit que $\mathfrak{m}/A = \mathfrak{m}(\mathfrak{m}/A)$. Par le lemme de Nakayama, $\mathfrak{m}/A = 0$; ceci implique que $A = \mathfrak{m}$ et donc $\mathfrak{m} = \sum_{j=1}^{r} R x_j$.

(ii) Conséquence du (i).

□

Proposition 6.2. Soit $(R, \mathfrak{m})$ est un anneau local noethérien. Alors

$$\dim(R) \leq \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2).$$

Preuve Voir [9]. □

6.2 Anneaux réguliers

Définition 6.3. Un **anneau local régulier** est un anneau local noethérien $(R, \mathfrak{m})$ tel que

$$\dim(R) = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2).$$

Définition 6.4. Un **anneau régulier** A est un anneau commutatif noethérien tel que $A_\mathfrak{p}$ est un anneau local régulier pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$.

Exemple 6.5. (i) Tout corps est régulier.

(ii) Si $(R, \mathfrak{m})$ est un anneau local régulier alors $\widehat{R}$ (le complété de R par rapport à $\mathfrak{m}$) est encore un anneau régulier.

Lemme 6.6. *Soit* $(R, \mathfrak{m})$ *un anneau local noethérien. Si* $x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$*, alors* $R/(x)$ *est régulier, et* $\dim(R/(x)) = \dim(R) - 1$.

Preuve Comme R est régulier, $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim(R) = \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$. Nous avons $\mathrm{ht}(\mathfrak{m})-1 \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{m}/(x)) \leq \dim((\mathfrak{m}/(x))/(\mathfrak{m}/(x))^2) = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)-1 = \mathrm{ht}(\mathfrak{m})-1$, car si $x_1+(x), \ldots, x_n+(x)$ est un ensemble générateur minimal de $\mathfrak{m}/(x)$ alors $x_1, \ldots, x_n, x$ est un ensemble générateur minimal de $\mathfrak{m}$. Donc $\dim(R/(x)) = \mathrm{ht}(\mathfrak{m}/(x)) = \dim((\mathfrak{m}/(x))/(\mathfrak{m}/(x))^2)$. □

Proposition 6.7. Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien. Supposons que $\mathfrak{m}$ puisse être engendré par une suite R-régulière $[x_1, \ldots, x_d]$. Alors R est un anneau local régulier et

$$d = \dim(R) = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2).$$

Preuve

$$d \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{m}) \leq \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq d$$

la première inégalité peut être montrée par induction sur d. Comme $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) = \dim(R)$ la deuxième vient de 6.2, et la troisième de 6.1 □

Proposition 6.8. Tout anneau local régulier est intègre.

Preuve Par induction sur $d = \dim(R)$. Si $d = 0$, alors R est un corps.
Si $d > 0$, Soit $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ les idéaux minimaux de R(comme R est noethérien leur nombre est fini). Si $\mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2 \subseteq \mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_s$, alors $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^2 \cup \mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_s$, par conséquent $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}_i$ pour un certain i (par le lemme d'évitement), et donc $d = \mathrm{ht}(\mathfrak{m}) = 0$. Ainsi il existe $x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ avec $x \notin \mathfrak{p}_i$ pour tout i. Par le lemme 6.6 $R/(x)$ est régulier de dimension $d-1$. par l'hypothèse de l'induction $R/(x)$ est intègre et donc (x) est un idéal premier, ainsi (x) contient un idéal minimal $\mathfrak{p}_i$. Si $\mathfrak{p}_i = (0)$, alors (0) est un idéal premier et R est intègre. Si $\mathfrak{p}_i \neq (0)$, pour tout $y \in \mathfrak{p}_i$ non nul, il existe $r \in R$ tel que $y = rx$. Comme $x \notin \mathfrak{p}_i$, $r \in \mathfrak{p}_i$, et donc $\mathfrak{p}_i \subseteq x\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{m}\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}_i$, qui implique $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}\mathfrak{p}_i$, par Nakayama $\mathfrak{p}_i = (0)$ contradiction. □

Proposition 6.9. $(R, \mathfrak{m})$ est un anneau local régulier si et seulement si $\mathfrak{m}$ peut être engendré par une suite R-régulière $[x_1, \ldots, x_d]$ où $d = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. De plus, si R est régulier, on a nécessairement $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim(R)$.

Preuve Par induction sur $d = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. Pour $d = 1$, comme R est régulier, il est intègre par la Proposition 6.8. Ainsi $\mathfrak{m} = (x_1)$ où x_1 est un non-diviseur de zéro dans R. Pour l'induction, $R/(x_1)$ est régulier de dimension $d-1$ par le Lemme 6.6. Ainsi, son idéal maximal est engendré par une suite $R/(x_1)$-régulière $\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_d$, et donc $x_1, \ldots, x_d$ est un ensemble générateur de $\mathfrak{m}$, qui est une suite R-régulière. Pour l'inégalité dans l'autre sens on utilise la Proposition 6.7. □

6.3 Critère de Serre pour les anneaux locaux noethériens réguliers

Commençons par montrer les deux propositions suivantes :

Proposition 6.10. Soit $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local noethérien et M un R-module de type fini. Alors les énoncés suivants sont équivalents :

(a) M est libre.

(b) M est projectif.

(c) M est plat.

(d) $\mathrm{Tor}_1^R(M, k) = 0$.

Preuve On a clairement (a)⇒(b)⇒(c)⇒(d). Montrons que (d)⇒(a). Supposons que $\mathrm{Tor}_1^R(M, k) = 0$. Soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble d'éléments tels que leurs images forment une k-base de $M/\mathfrak{m}M$. Soit F le R-module libre ayant $\{e_1, \ldots, e_n\}$ pour base. Soit $\phi : F \to M$ l'homomorphisme défini par $e_i \mapsto x_i$. Par Nakayama, l'application ϕ est surjective. On a donc la suite exacte courte

$$0 \to K \to F \to M \to 0. \tag{9}$$

où K est défini comme le noyau de ϕ. On va montrer que K est nul. En appliquant le foncteur $\_ \otimes_R k$ à (9) on trouve la suite exacte

$$\mathrm{Tor}_1^R(F, k) = 0 \to \mathrm{Tor}_1^R(M, k) = 0 \to K/\mathfrak{m}K \to F/\mathfrak{m}F \xrightarrow{\overline{\phi}} M/\mathfrak{m}M \to 0 \tag{10}$$

Par le choix des x_i, on a que $\overline{\phi}$ est injective et par l'exactitude de la suite (10) on trouve donc $K/\mathfrak{m}K = 0$. Finalement, en appliquant encore une fois Nakayama, on trouve que $K = 0$, en particulier M est R-libre. $\square$

Proposition 6.11. Soit $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local noethérien et M un R-module de type fini. Alors les énoncés suivants sont équivalents :

(a) $\mathrm{pd}_R M \leq n$.

(b) $\mathrm{Tor}_p^R(M, N) = 0$ pour tout $p > n$ et tout R-module N de type fini.

(c) $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M, k) = 0$.

Preuve On a clairement (a)⇒(b)⇒(c). Montrons que (c)⇒(a) Soit

$$0 \to M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \to M_0 \xrightarrow{d_n} M \to 0$$

une suite exacte où le M_j sont libres pour $0 \leq j \leq n-1$. On veut montrer que M_n est libre. On pose $Z_i := \ker d_i$ pour $0 \leq i \leq n-1$. On obtient la famille de suites exactes courtes

$$0 \to Z_i \xrightarrow{\subseteq} M_i \xrightarrow{d_{i-1}} Z_{i-1} \to 0$$

pour $1 \leq i \leq n-1$. Comme M_i est libre, pour $1 \leq i \leq n-1$, il suit que

$$\mathrm{Tor}_j^R(Z_i, k) = \mathrm{Tor}_{j+1}^R(Z_{i-1}, k),$$

pour $j \geq 1$. Finalement, remarquons que

$$\mathrm{Tor}_1^R(M_n, k) = \mathrm{Tor}_2^R(Z_{n-2}, k) = \ldots = \mathrm{Tor}_n^R(Z_0, k) = \mathrm{Tor}_{n+1}^R(M, k) = 0.$$

Il suit, de la Proposition 6.10, que M_n est libre. Ainsi $\mathrm{pd}_R(M) \leq n$. $\square$

Théorème 6.12. *Soit $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local noethérien. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) R est régulier.

(ii) $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(R) \simeq k[x_1, \ldots, x_r]$ où $r = \dim(R)$. Ici $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$ est l'anneau gradué associé de R par rapport à l'idéal $\mathfrak{m}$.

(iii) La dimension globale projective $D(R) < \infty$.

Si une des trois conditions est satisfaite alors $\dim(R) = D(R)$.

Preuve $(i) \Rightarrow (ii)$ Résultat classique.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Soit $x = [x_1, \ldots, x_n]$ un ensemble minimal de générateur de $\mathfrak{m}$. Alors de la Proposition 6.9 on sait que la suite x est R-régulière. De la Proposition 4.65, on tire que $K(x, R)$ est une résolution libre de k, i.e.,

$$0 \to K_n(x, R) \overset{d_n}{\to} \ldots \overset{d_1}{\to} K_0(x, R) \overset{d_0}{\to} k \overset{\epsilon}{\to} 0$$

est un complexe exact. Rappelons que que $K_0(x, R) = R$ et ϵ est la projection canonique. Il suit donc de la définition des foncteurs dérivés Tor_i que $H_i(x, M) \simeq \mathrm{Tor}_i(x, M)$ pour tout $i \geq 0$. En particulier, $\mathrm{Tor}_i^R(k, k) \simeq H_i(x, k) = K_i(x, k) = K_i(x) \otimes_R k$. Ainsi $\mathrm{Tor}_i^R(k, k) \simeq \bigwedge_R^i k$. En particulier, on a $\mathrm{Tor}_n^R(k, k) = k$ et $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M, k) = 0$. De la Proposition 6.10, on tire que $\mathrm{pd}_R(M) \leq n$ pour tout R-module M de type fini. Du Théorème 5.7, il suit que $D(R) = n$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Posons $r := D(R) < \infty$ et $n := \dim(R) \leq \infty$. Notons que du Corollaire 5.28 on sait que $r \leq n$. On a $\mathrm{pd}_R R = 0$. Il suit donc de la Proposition 5.30 que $\mathrm{depth}_R R = r$. Soit $[x_1, \ldots, x_s]$ un ensemble minimal de générateurs de $\mathfrak{m}$. de la Proposition 6.2, on sait que $n \leq s$. En vertu du Corollaire 5.28, on sait aussi que $r \leq n$. Grâce au Lemme 4.70, on sait que l'application canonique $K_i(x, k) \to \mathrm{Tor}_i(k, k)$ est une injection. En particulier, $\mathrm{Tor}_s^R(k, k) \neq 0$ et donc $r \geq s$. On a donc les inégalités suivantes

$$n \leq s \leq r = \mathrm{depth}(R) \leq n.$$

Il suit donc que $r = n$ et $s = n$. Comme $s = n$, la Proposition 6.9 implique que R est régulier. $\square$

Corollaire 6.13.

$$R \textit{ régulier} \Rightarrow R \textit{ Gorenstein} \Rightarrow R \textit{ Cohen-Macaulay}$$

Références

[1] Frank W Anderson and Kent R Fuller. *Rings and categories of modules*, volume 13. Springer Science & Business Media, 2012.

[2] Nicolas Bourbaki. *Algèbre : chapitre 10. Algèbre homologique*, volume 9. Springer Science & Business Media, 2007.

[3] Winfried Bruns and H. Jürgen Herzog. *Cohen-macaulay rings*. Cambridge University Press, 1998.

[4] David Eisenbud. *Commutative Algebra : with a view toward algebraic geometry*, volume 150. Springer Science & Business Media, 1995.

[5] I. Kaplansky. Projective modules. *The Annals of Mathematics, Second series*, volume 68, no 2.

[6] Irving Kaplansky. *Commutative rings*. Boston, 1970.

[7] Irving Kaplansky. *Fields and rings*. University of Chicago Press, 1972.

[8] Hideyuki Matsumura and Miles Reid. *Commutative ring theory*, volume 8. Cambridge university press, 1989.

[9] H. Mesbah. Décompositon primaire pour les sous-modules et notions de dimension pour les anneaux commutatifs. *Essai de maîtrise à l'U. Laval*, pages 1–37, 2015.

[10] Joseph Rotman. *An introduction to homological algebra*. Springer Science & Business Media, 2008.

[11] Joseph J Rotman. *Advanced modern algebra*, volume 114. American Mathematical Soc., 2010.

[12] Sean Sather-Wagstaff. Commutative algebra mini-course. 2004.

[13] Jean-Pierre Serre. *Local algebra*. Springer Science & Business Media, 2000.

[14] Charles A Weibel. An introduction to homological algebra. *Bull. Amer. Math. Soc. 33 (1996)*, pages 1–450, 1996.