Prolongement des fonctions holomorphes presque périodiques.

Mémoire

Wilson FOTSING

Maîtrise en mathématiques
Maître ès sciences (M. Sc.)

Québec, Canada

Résumé

Le but de ce mémoire est de présenter une approche qui utilise les techniques d'analyse fonctionnelle pour étudier les fonctions holomorphes presque périodiques à plusieurs variables. Ces fonctions sont présentées comme des sections holomorphes d'un fibré vectoriel holomorphe de Banach associé à un revêtement régulier sur une variété de Stein. Cette approche nous permettra d'établir un théorème de prolongement pour les fonctions holomorphes presque periodiques.

Abstract

The aim of this thesis is to present an approach that uses functionnal analysis methods to the study of almost periodic functions of several variables. These functions are presented as holomorphic sections of holomorphic Banach vector bundle associated to a regular covering over a Stein manifold. This approach will allow us to establish an extension theorem for holomorphic almost periodic functions.

Table des matières

À mes parents

Table de Notation

$\mathcal{O}(X)$	les fonctions holomorphes sur X
$U \Subset X$	U est relativement compact dans X
$\bigsqcup$	réunion disjointe
$\mathbb{Z}_+$	$\{0,1,2,\ldots\}$
$g \circ f$	la composition de deux applications g et f
$\bigoplus$	somme de Whitney

Remerciements

Sans la protection et la volonté du seigneur Dieu tout puissant, je n'aurais rien obtenu de toutes les graces dont je jouis aujourd'hui. Un merci spécial s'adresse à mes directeurs de recherche, Damir KINZEBULATOV et Hugo CHAPDELAINE, qui ont accepté de me diriger pour ce mémoire, m'ont soutenu, m'ont prodigué beaucoup de conseils et m'ont transmis la rigueur mathématique.

Je remercie également Alexandre GIROUARD, Line BARIBEAU, Thomas RANSFORD qui n'ont pas hésité à m'apporter leur soutien pour la réussite de ce projet, m'ont accordé un cadre favorable à mon intégration et à mon épanouissement. Merci au staff administratif, à tous les professeurs du Département de mathématiques et de statistique de l'Université Laval et mes camarades de promotion auprès desquels j'ai beaucoup appris. Sans oublier les membres des laboratoires d'algèbre et d'analyse, dont les discutions m'ont beaucoup édifié et m'ont permis de developper l'esprit de recherche.

Merci à mes grands frères et soeurs Yves TEHOU, Marcel TAWE, Rebecca NOUMEN et Willy KOUAM qui m'ont accompagné dans mes projets d'étude et l'ont rendu possible à la base. Je ne manquerai pas de remercier toute ma famille et amis, particulièrement Alex's LASSIYE et Vincent de paul KUITCHOUO, qui ont toujours été disponibles pour moi, prêt à me donner des conseils, à m'encourager et à me soutenir.

Je ne saurais terminer sans faire un coucou à ma conjointe D'Avila BALLA, qui est toujours là pour moi, qui partage mes joies et ressent mes peines.

Introduction

Au cours des années 1923, Harald Bohr a introduit la théorie des fonctions presque périodiques. Cette branche des mathématiques a alors connu un essor considérable grâce aux travaux de Hermann Weyl, Salomon Bochner, John Von Neumann et bien d'autres mathématiciens. Dans les années 1950, une classe de variétés complexes a été introduite dans les travaux de plusieurs mathématiciens y compris Henri Cartan, Hans Remmert et Karl Stein qui possèdent la structure qui permet à résoudre des problèmes cohomologiques. Ces variété ont été nommés plus tard les variétés de Stein.

L'objectif de ce mémoire est d'établir un théorème de prolongement holomorphe presque périodique (théorème 6.3) en utilisant les techniques d'analyse fonctionnelle et la théorie de cohomologie de Čech.

Dans le premier chapitre, nous rappelons la définition d'une variété complexe.

Dans le second chapitre, on parlera des revêtements et des groupes fondamentaux.

Dans le troisième chapitre, on parlera des faisceaux analytiques cohérents et de la cohomologie de Čech.

Le quatrième chapitre est réservé à l'étude des variétés de Stein. On verra par la suite que le problème de prolongement holomorphe est résoluble sur les variétés de Stein.

Au cinquième chapitre, nous parlerons des fonctions holomorphes à valeurs dans un espace de Banach, des fibrés vectoriels holomorphes et des fibrés vectoriels holomorphes de Banach.

Le dernier chapitre quant à lui, parlera des fonctions holomorphes définies sur des revêtements réguliers ; c'est ici que seront introduites les fonctions presque périodiques. On montrera le théorème de prolongement holomorphe pour les fonctions holomorphes presque périodiques.

Chapitre 1

Variétés complexes

1.1 Espaces topologiques

Définition 1.1. Un espace topologique est un couple (X, τ) où X est un ensemble et τ est une collection de sous-ensembles de X qui satisfait les conditions suivantes :

1) On a $\varnothing \in \tau$ et $X \in \tau$.

2) Pour tout $U_1, U_2 \in \tau$, $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

3) Soit I est un ensemble d'indices. Alors pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'éléments de τ on a

$$\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau.$$

Les éléments de τ sont appelés les ouverts. Leurs complémentaires sont appelés les fermés.

Définition 1.2. Soit (X,τ) un espace topologique. Une suite $\{x_n\}$ est dite convergente dans $X = (X,\tau)$ s'il existe $x \in X$ tel que pour tout ouvert $V \ni x$ il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $x_n \in V$.

Dans ce mémoire, tous les espaces topologiques considérés seront séparés au sens de Hausdorff, c'est-à-dire que si x, $y \in X$ sont deux points distincts alors ceux-ci admettent des voisinages disjoints.

Définition 1.3. Une application

$$f : X_1 \to X_2$$

entre deux espaces topologiques (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) est dite continue si pour tout $V \in \tau_2$ on a $f^{-1}(V) \in \tau_1$.

Lorsque X_1 est un espace métrique, cette définition est équivalente à la suivante : f est continue si et seulement si pour toute suite convergente $x_n \to x$ dans X_1 on a $f(x_n) \to f(x)$ dans X_2.

Définition 1.4. Soient (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) deux espaces topologiques. Une application $g : X_1 \to X_2$ continue est appelé un homéomorphisme si g est une bijection et g^{-1} est continue.

1.2 Variétés différentielles

1.2.1 Cartes locales

Soit X un espace topologique Hausdorff, V un ouvert dans X. Un homéomorphisme $\varphi : V \to U$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ appelée une carte de X.

Deux cartes $\varphi_1 : V_1 \to U_1$, $\varphi_1 : V_2 \to U_2$ sont dites compatibles si l'application de transition

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(V_1 \cap V_2) \subseteq \mathbb{R}^n \to \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \subseteq \mathbb{R}^n$$

est de classe C^∞, aussi bien que son inverse. Si $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, alors les deux cartes sont automatiquement dites compatibles.

Un atlas lisse $\mathcal{A}$ de dimension n de X est une collection de cartes compatibles à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telles que leurs domaines recouvrent X.

Deux atlas sont dits compatibles si leurs cartes sont compatibles. La classe d'équivalence du choix d'un atlas de X détermine une structure de variété différentielle sur X.

Exemple 1.1. 1) $\mathbb{R}^n$ est une variété différentielle de dimension n. Les cartes locales sont les couples (U,Id_U) où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Id_U est l'application d'identité sur U.

2) Si M et N sont deux variétés différentielles de dimensions m et n respectivement, alors $M \times N$ est une variété différentielle de dimension $m+n$ appelée variété produit. Dans ce cas, si $\mathcal{A} = \{(U_\alpha,f_\alpha), \alpha \in I\}$ et $\mathcal{B} = \{(V_\beta, g_\beta), \beta \in J\}$ sont des atlas de M et N respectivement, alors

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(U_\alpha \times V_\beta, (f_\alpha,g_\beta)) \text{ avec } (f_\alpha,g_\beta)(x,y) = (f_\alpha(x),g_\beta(y)) \ \alpha \in I, \beta \in J\}$$

est un atlas de $M \times N$.

3) Considérons le cercle $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, choisissons le point $N = (0,1) \in S^1$. On recouvre S^1 par les deux ouverts suivants : $U = S^1 - \{N\}$ et $V = \{(x,y) \in S^1 : y > 0\}$. On choisit les cartes locales suivantes :

$$\begin{aligned} \phi : U &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \frac{x}{1-y}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi : V &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto y. \end{aligned}$$

Alors on vérifie que $\{(U,\phi), (V,\varphi)\}$ est un atlas lisse, donc S^1 est une variété différentielle de dimension 1.

4) Par 2) et 3) le tore

$$T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ fois}}$$

est une variété différentielle de dimension n.

1.2.2 Difféomorphismes

Soit $X = (X,\mathcal{A})$, $Y = (Y,\mathcal{B})$ deux variétés différentielles.

Définition 1.5. Une application $f : X \to Y$ continue est dite lisse si $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ est lisse pour toutes les cartes locales $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$ et $(V,\psi) \in \mathcal{B}$.

Définition 1.6. Une application $f : X \to Y$ est un difféomorphisme si f est bijective, f est lisse et sont inverse f^{-1} est lisse.

On notera par $C^\infty(X)$ l'espace de toutes les fonctions lisses $X \to \mathbb{R}$.

1.2.3 Espace tangent

Définition 1.7. Soit X une variété différentielle de dimension n, $x \in X$. Un vecteur tangent à X en x est une application $\mathbb{R}$-linéaire $\nu : C^\infty(X) \to \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes : pour tout $f,g \in C^\infty(X)$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

1. $\nu(f + \lambda g) = \nu(f) + \lambda\nu(g)$,

2. $\nu(fg) = \nu(f)\, g(x) + f(x)\nu(g)$.

Localement, si on considère une carte locale (U, ϕ) autour de x, alors pour tout $f \in C^\infty(X)$,

$$\nu(f)(x) = \sum_{1\leq j\leq n} \nu_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

où $(x_1,\ldots,x_n)$ sont les composants de ϕ et où les $\nu_j \in \mathbb{R}$ sont des scalaires.

L'ensemble de tous les vecteurs tangents à X en x est un espace vectoriel appelé l'espace tangent de X en x et noté par $T_x X$.

1.3 Variétés complexes

1. Soit X un espace topologique Hausdorff, V un ouvert dans X. Une homéomorphisme $\varphi : V \to U$ où U est un ouvert dans $\mathbb{C}^n$ est appelée une carte complexe.

Deux cartes complexes $\varphi_1 : V_1 \to U_1$, $\varphi_2 : V_2 \to U_2$ sont dites holomorphiquement compatibles si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

a) $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

b) $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(V_1 \cap V_2) \to \varphi_1(V_1 \cap V_2)$ est un bihomorphisme, c'est-à-dire une bijection holomorphe dont la réciproque est aussi holomorphe.

Un atlas holomorphe est une collection de cartes holomorphiquement compatibles à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ telles que leurs domaines recouvrent X. Deux atlas holomorphes sont dits compatibles si leurs cartes sont holomorphiquement compatibles. La classe d'équivalence du choix d'un atlas holomorphe détermine une structure de variété complexe X.

2. Soient $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ deux variétés complexes. Une application $f : X \to Y$ continue est dite holomorphe si $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ est holomorphe pour toutes les cartes holomorphes locales $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$ et $(V,\psi) \in \mathcal{B}$.

Une application $f : X \to Y$ est un biholomorphisme si f est bijective, f et f^{-1} sont holomorphes.

Chapitre 2

Revêtements

Dans toute cette section, sauf mention du contraire, I désignera l'intervalle réel [0,1]. Pour ce chapitre, X et Y seront des espaces topologiques. On rappelle qu'un chemin tracé dans X est une fonction continue de I à valeurs dans X. Un lacet de X est un chemin fermé de X, c'est-à-dire un chemin $\gamma : I \to X$ tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$. L'exposition ci-dessous suit les chapitres 9 et 13 de [11].

2.1 Homotopie de chemin

Définition 2.1. Soit X, Y deux espaces topologiques, $f, g : X \to Y$ deux fonctions continues. On dit que f et g sont homotopes s'il existe $H : X \times I \to Y$ continue telle que $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = g(x)$ pour tout $x \in X$. L'application H est appelée une homotopie.

On écrit $f \simeq g$ pour dire que f et g sont homotopes.

Définition 2.2. Deux chemins f et g ayant une même origine x_0 et une même extremité x_1, tracés sur un espace topologique X, sont dits homotopes (homotopie de chemin) si il existe une fonction continue $H : I \times I \to X$ telle que

$$H(x,0) = f(x), \quad H(x,1) = g(x), \quad H(0,t) = x_0, \quad H(1,t) = x_1$$

pour tout $(x,t) \in I \times I$. L'application H est appelée une homotopie de chemin.

Définition 2.3. Soit $f : X \to Y$ une fonction continue. On dit que f est homotopiquement nulle si f est homotope à une fonction constante $\widehat{y_0} : X \to \{y_0\}$ (fonction constante de valeur y_0).

Soit X un espace topologique. Pour tout $x \in X$, on définit le chemin constant par

$$\begin{aligned} e_x : I &\to X \\ s &\mapsto e_x(s) := x. \end{aligned}$$

La relation d'homotopie et d'homotopie de chemin sont des relations d'équivalence.

Définition 2.4. Un espace topologique X est dit contractile si l'application $\mathrm{Id}_X : X \to X$ est homotopiquement nulle.

Exemple 2.1. Dans $\mathbb{R}^2$, deux fonctions f et g tracées sont toujours homotopes. Il suffit de considérer l'homotopie suivante :

$$F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x).$$

Exemple 2.2. Les espaces I et $\mathbb{R}$ sont contractiles.

Proposition 2.1. Un espace topologique contractile est nécessairement connexe par arcs.

Démonstration. Si X est contractile, alors X se rétracte en un point $a \in X$ via une application continue $H : I \times X \to X$ telle que : $H(0,\cdot) = \mathrm{I}d_X$, $H(0,\cdot) = a$, l'application constante.

Pour un point $b \in X$ quelconque, considérons le chemin continu $\gamma : I \to X$ défini par : $\gamma(s) = H(s,b)$. On a bien $\gamma(0) = b$ et $\gamma(1) = a$. Ainsi, a peut être relié à tout point par un chemin tracé dans X. Par transitivité on en déduit que deux points quelconques de X peuvent toujours être reliés par un chemin. □

2.2 Groupe fondamental

Soit $f : I \to X$ un chemin fermé (aussi appelé lacet). On notera la classe d'équivalence de f en tant que chemin par $[f]$. Soit f et g sont deux lacets tracés sur X tels que $f(0) = g(0)$. On définit le nouveau lacet $h = f * g$ par

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(2s-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

L'opération $*$ est appelée la loi de concaténation. Notons que cette loi de concaténation descend en une loi de composition sur les classes d'équivalences de lacets basés en un point x_0 donné.

Théorème 2.1. L'ensemble $\pi_1(X, x_0)$ des classes d'équivalence des chemins fermés dans X ayant comme point de base x_0, muni de la loi de concaténation : $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$ est un groupe. Ce groupe est appelé le groupe fondamental de X basé en x_0.

Exemple 2.3. 1) $\pi_1(\mathbb{R}^n,x_0) = \{[e_{x_0}]\}$.

2) Si $X \subset \mathbb{R}^n$ est convexe, alors $\pi_1(X,x_0) = \{[e_{x_0}]\}$.

3) $\pi_1(S^1, x_0) \simeq \mathbb{Z}$.

Proposition 2.2. Soit X un espace topologique connexe par arc. Soient x_0 ,$x_1 \in X$. Alors, $\pi_1(X,x_0) \simeq \pi_1(X,x_1)$.

Définition 2.5. Soit X un espace topologique connexe par arc. L'espace X est dit simplement connexe si il existe $x_0 \in X$ tel que $\pi_1(X,x_0) = 0$.

Remarque 2.1. Notons que si un tel x_0 existe dans la Définition 2.5 alors, en vertu de la Proposition 2.2, $\pi_1(X,x')$ sera aussi trivial pour tout $x' \in X$.

Définition 2.6. Soit X un espace topologique et $x_0 \in X$. On dit que X est localement connexe par arc en x_0 si pour tout ouvert $U \ni x_0$, il existe un ouvert connexe par arc $V \ni x_0$ tel que $V \subseteq U$.

X est localement connexe par arc s'il est localement connexe par arc en tous ses points.

Proposition 2.3. Soit X un espace topologique localement connexe par arc, $x_0 \in X$ et $\mathcal{C}$ la composante connexe de x_0 dans X. Alors $\pi_1(X,x_0) = \pi_1(\mathcal{C},x_0)$.

Lorsque X est un espace topologique localement connexe par arc alors ses composantes connexes coïncident avec ses composantes connexes par arc. Sous cette hypothèse on voit que la classe d'isomorphisme du groupe fondamental ne dépend que du choix de la composante connexe qui contient x_0 et non du choix de x_0 lui-même.

Soit $h : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques telle que $h(x_0) = y_0$. On définit l'homomorphisme induit par :

$$\begin{array}{rcl} h_* : \pi_1(X,x_0) & \to & \pi_1(Y,y_0) \\ [f] & \mapsto & h_*[f] = [h \circ f]. \end{array}$$

Les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. $(h \circ k)_* = h_* \circ k_*$,

2. $(\mathrm{I}d_X)_*(f) = f$

2.3 Espaces de revêtement

2.3.1 Application de revêtement

Définition 2.7. Soient X_0 et X deux variétés différentielles. Une application $p : X \to X_0$ est dite une application de revêtement si p est surjective et si tout point $x \in X_0$ admet un voisinage U uniformément recouvert par p, c'est-à-dire $p^{-1}(U)$ peut s'écrire comme la réunion disjointe d'ouverts de X, tous difféomorphes à U via l'application p.

Remarque 2.2. Notons que la topologie induite sur la fibre au-dessus de x, à savoir $p^{-1}(x) \subseteq X$ correspond à la topologie discrète.

Exemple 2.4. 1) Voici un exemple d'un revêtement :

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\to S^1 \\ x &\mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x). \end{aligned}$$

2) Soit $T = \mathbb{R}^n + i\Omega \subset \mathbb{C}^n$ où $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ouvert. Posons

$$p(z) := (e^{i2\pi z_1}, \ldots, e^{i2\pi z_n}), \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in T.$$

Alors on a un revêtement $p : T \to T_0$ où $T_0 := p(T) \subset \mathbb{C}^n$.

2.3.2 Propriété des revêtements

Soit $X \xrightarrow{p} X_0$ un revêtement. Alors pour tout chemin $\gamma : I \to X_0$ tracé dans X_0 et pout tout $x \in X$ tel que $p(x) = \gamma(0)$ il existe un unique chemin $\tilde{\gamma} : I \to X$ tel que $\tilde{\gamma}(0) = x$ et $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$, c'est-à-dire tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] & X_0 \\ I \arrow[u, bend left, "\tilde{\gamma}"] \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

2.3.3 Équivalence des espaces de revêtement

Définition 2.8. Soit $p : X \to X_0$ et $p : X' \to X_0$ deux applications de revêtement, alors p et p' sont dites équivalentes s'il existe un homéomorphisme $h : X \to X'$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & X' \arrow[dl, "p'"] \\ & X_0 & \end{tikzcd}$$

Définition 2.9. Un espace topologique pointé est une paire (X,x_0) où X est un espace topologique et $x_0 \in X$ est un point de base choisi. Soit (X,x_0) et (Y,y_0) deux espaces topologiques pointés. Un morphisme d'espaces topologiques pointés $f : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ est une application continue $f : X \to Y$ telle que $f(x_0) = y_0$.

Lemme 2.1. Soit $p : (X,x) \to (X_0,x_0)$ un revêtement d'espaces topologiques pointés. Soit $f : Y \to X_0$ une application continue telle que $f(y) = x_0$. Alors f peut être relevée en une application d'espaces topologiques pointés $\tilde{f} : (Y,y) \to (X,x)$, ce qui est équivalent à dire que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} (X,x) \arrow[r, "p"] & (X_0,x_0) \\ (Y,y) \arrow[u, bend left, "\tilde{f}"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

si et seulement si

$$f_*(\pi_1(Y,y)) \subset p_*(\pi_1(X,x)).$$

De plus, si le relèvement $\tilde{f}$ existe, il est unique.

Théorème 2.2. Soient $p : X \to X_0$ et $p' : X' \to X_0$ deux revêtements. On pose

$$H_0 = p_*(\pi_1(X,x)), \quad H_0' = p_*(\pi_1(X',x')).$$

Alors il existe une équivalence h entre p et p' si et seulement si H_0 et H_0' sont conjugués dans $\pi_1(X_0,x_0)$. De plus, $h(x) = x'$ si et seulement si $H_0 = H_0'$.

2.3.4 Revêtement universel

Pour cette section on suppose que X_0 est connexe par arc.

Définition 2.10. Une revêtement $p : X \to X_0$ tel que X est connexe et simplement connexe est dit universel.

Remarque 2.3. Soit $p_1 : (X,x) \to (X_0,x_0)$ et $p' : (X',x') \to (X_0,x_0)$ deux revêtements universels pointés au-dessus de (X_0,x_0). Comme $\pi_1(X,x)$ et $\pi_1(X',x')$ sont triviaux, leurs images directes correspondent au groupe trivial de $\pi_1(X_0,x_0)$. En appliquant le Théorème 2.2 on en déduit que p et p' sont équivalents.

Remarque 2.4. On peut montrer qu'un revêtement universel de X_0 existe si et seulement si X_0 est localement connexe par arc et semi-localement simplement connexe, voir Corollaire 82.2 p.498 de [11].

Lemme 2.2. Soient p, q, r des applications continues telles que $p = r \circ q$. Si p et r sont des revêtements, alors q l'est aussi ; si p et q sont des revêtements, alors r l'est aussi.

Théorème 2.3. Soit $p : X \to X_0$ un revêtement universel. Alors pour tout revêtement $r : Y \to X_0$, il existe un revêtement $q : X \to Y$ tel que $p = r \circ q$, c'est-à-dire tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, bend right, "q"'] \arrow[dr, bend left, "p"] & \\
Y \arrow[r, "r"'] & X_0
\end{tikzcd}$$

Autrement dit, le revêtement universel de X_0 domine tout revêtement de X_0.

2.3.5 Revêtement régulier

Définition 2.11. Une transformation de revêtement associée au revêtement de base $p : X \to X_0$ est une équivalence de ce revêtement avec lui-même. On notera cet ensemble de transformations de revêtement associé au revêtement de base p par $\mathcal{C}(X,p,X_0)$.

L'ensemble $\mathcal{C}(X,p,X_0)$ admet une structure naturelle de groupe induite par la composition de fonctions.

Définition 2.12. Un revêtement $p : X \to X_0$ est dit régulier si $H_0 = p_\star(\pi_1(X,x))$ est un sous-groupe normal de $\pi_1(X_0,x_0)$.

Théorème 2.4. Le revêtement $p : X \to X_0$ est régulier si et seulement si pour toute paire $x_1, x_2 \in p^{-1}(x_0)$ il existe une transformation de revêtement $h \in \mathcal{C}(X,p,X_0)$ telle que $h(x_1) = x_2$.

Chapitre 3

Cohomologie de Čech

3.1 Faisceaux

Soit X un espace topologique.

Définition 3.1. Un préfaisceau de groupes abéliens sur X est la donnée, pour tout ouvert U de X, d'un groupe abélien $\mathcal{F}(U)$ et pour tout ouvert $V \subset U$ d'un morphisme

$$r_{U,V} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$$

appelé morphisme de restriction de U à V, satisfaisant les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{F}(\varnothing) = \{0\}$;
2. $r_{U,U} = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(U)}$;
3. Si $W \subset V \subset U$ sont des ouverts dans X, alors $r_{U,W} = r_{V,W} \circ r_{U,V}$.

Un préfaisceau $\mathcal{F}$ sur X est dit un faisceau si de plus pour tout ouvert U de X et pour tout recouvrement $(V_i)_{i\in I}$ de U par des ouverts on a :

(4) (axiome de recollement) Si $(s_i \in \mathcal{F}(V_i))_{i\in I}$ est une collection d'éléments telle que pour tout $i,j \in I$,

$$r_{V_i,V_i\cap V_j}(s_i) = r_{V_j,V_i\cap V_j}(s_j),$$

alors, il existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tel que pour tout $i \in I$,

$$r_{U,V_i}(s) = s_i;$$

(5) (axiome d'unicité) Pour tout $s,t \in \mathcal{F}(U)$,

$$(r_{U,V_i}(s) = r_{U,V_i}(t) \text{ pour tout } i \in I) \Rightarrow s = t.$$

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X, alors pour tout ouvert U de X, un élément $s \in \mathcal{F}(U)$ est appelé une section au-dessus de U. La section $r_{U,V}(s) \in \mathcal{F}(V)$ sera habituellement notée par $s|_V$.

On écrira $(\mathcal{F},r)|X$ pour signifier que $\mathcal{F}$ est un faisceau au-dessus de X, avec $r := \{r_{U,V}$ où $V \subset U \subset X\}$.

Exemples 3.1.

(1) Le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ (resp. le faisceau des fonctions harmoniques sur $\mathbb{C}$, resp. le faisceau des fonctions lisses sur une variété différentielle) avec comme morphismes de restriction, la restriction usuelle des fonctions.

(2) Soient X un espace topologique, $x \in X$, et G un groupe abélien. On définit $\underline{G}_x$, le faisceau gratte-ciel en x de la manière suivante : si U est un ouvert de X, alors

$$\underline{G}_x(U) = \begin{cases} G & \text{si } x \in U, \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $V \subset U$ est un ouvert de X, le morphisme de restriction de U à V sera définit comme suit :

$$r_{U,V} = \begin{cases} \mathrm{Id}_{\{0\}} : \{0\} \to \{0\} & \text{si } x \notin U, \\ [0] : G \to \{0\} & \text{si } x \in U - V, \\ \mathrm{Id}_G & \text{si } x \in V \end{cases}$$

Les deux contre exemples suivants nous permettent chacun de voir la necessité d'exiger les conditions (4) et (5) dans la Définition 3.1, il s'agit en fait de préfaisceaux qui ne sont pas des faisceaux de groupes abéliens :

(3) Soit $X = \mathbb{C}$ et $\mathcal{E}$ le préfaisceau des fonctions constantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$ sur $X = \mathbb{C}$. Alors $\mathcal{E}$ n'est pas un faisceau. En effet, soit U_1,U_2 deux ouverts non-vides et disjoints de X. Soit f_1 la fonction constante égale à $1 \in \mathbb{Z}$ sur U_1 et soit f_2 la fonction constante égale à $2 \in \mathbb{Z}$ sur U_2. Alors il n'existe pas de section $t \in \mathcal{E}(U_1 \cup U_2)$ telle que $t|_{U_1} = f_1$ et $t|_{U_2} = f_2$.

(4) Donnons un exemple simple où l'unicité du recollement n'est pas satisfaite. Considérons l'espace topologique à deux points $X = \{x,y\}$ muni de la topologie discrète. Soit $\mathcal{E}$ le préfaisceau défini par $\mathcal{E}(\{x\}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathcal{E}(\{y\}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathcal{E}(\{x,y\}) = \mathbb{Z}$ où les morphismes de restriction $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ correspondent à la projection. Alors $\mathcal{E}$ n'est pas un préfaisceau car l'unicité du recollement (axiome 5) est violée. En effet, l'application

$$\mathcal{E}(\{x,y\}) \to \mathcal{E}(\{x\}) \times \mathcal{E}(\{y\})$$

n'est pas injective (notons aussi qu'elle n'est même pas surjective donc l'axiome 4 est aussi violé).

3.1.1 Morphisme de faisceaux

On considère $(\mathcal{F},r)|X$ et $(\mathcal{G},r')|X$, deux faisceaux au-dessus de X ; un morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{G}$ est la donnée pour tout ouvert U de X, d'un morphisme de groupes abéliens $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ tel que pour tout ouvert $V \subset U$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "r_{U,V}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "r'_{U,V}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"'] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

Exemple 3.1. Si $\mathcal{F}$ désigne le faisceau des fonctions holomormphes sur $\mathbb{C}$ et $\mathcal{G}$ désigne le faisceau des fonctions harmoniques à valeurs complexes, on peut définir les morphismes de faisceaux (de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels) suivants :

1. $\varphi : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} : f \mapsto f$;
2. $\Psi : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} : g \mapsto \text{Re}(g)$, partie réelle de g.

Définition 3.2. Soit $\varphi : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux de groupes abéliens au-dessus de X. On définit les deux préfaisceaux suivants sur X déduits de φ :

(i) $\ker \varphi$: pour un ouvert $U \subseteq X$ on pose

$$(\ker \varphi)(U) := \ker \varphi_U \leq \mathcal{F}(U)$$

où φ_U est le morphisme de groupes abéliens $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$.

(ii) $\widetilde{\text{im}}\varphi$: pour un ouvert $U \subseteq X$ on pose

$$(\widetilde{\text{im}}\varphi)(U) := \text{im}\, \varphi_U \leq \mathcal{G}(U)$$

où φ_U est le morphisme de groupes abéliens $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$.

Théorème 3.1. Soit $\varphi : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme de faisceaux au-dessus de X. Alors le préfaisceau $\ker \varphi$ est en fait un faisceau sur X, appelé le noyau de φ. De plus, $\widetilde{\text{im}}\varphi$ est un préfaisceau sur X (pas un faisceau en général) appelé le préfaisceau image de φ

Démonstration.

1. Montrons que $\ker \varphi$ est un faisceau. On a préalablement besoin de savoir que $(\ker \varphi)(U) = \ker(\varphi_U)$; de plus, les morphismes de restriction seront notés $a_{U,V}$ et représenteront les restrictions de $r_{U,V}$ (où $V \subset U$) à $(\ker \varphi)(U)$.

On a $(\ker \varphi)(\varnothing) = \ker(\varphi_{(\{\varnothing\})})$. Or $\varphi(\{\varnothing\}) : \mathcal{F}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing\} \to \mathcal{G}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing\}$, donc $(\ker \varphi)(\{\varnothing\}) = \{\varnothing\}$.

On a trivialement que $a_{U,U} = \text{Id}_{\ker \varphi(U)}$ car $a_{U,U} = r_{U,U}|_{(\ker \varphi)(U)} = \text{Id}_U|_{\ker \varphi(U)} = \text{Id}_{\ker \varphi(U)}$.

Soient $W \subset V \subset U$ trois ouverts de X. Cette situation nous donne le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "r_{U,V}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "r'_{U,V}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, "r_{V,W}"'] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "r'_{V,W}"] \\
\mathcal{F}(W) \arrow[r, "\varphi_W"'] & \mathcal{G}(W)
\end{tikzcd}$$

Pour tout $s \in (\ker\varphi)(U)$, $\varphi_V(r_{U,V}(s)) = r'_{U,V} \circ \varphi_U(s) = 0$, donc $r_{U,V}(\ker\varphi_U) \subset \ker\varphi_V$. De même, $r_{V,W}(\ker\varphi_V) \subset \ker\varphi_W$. Ceci rend légitime la suite suivante :

$$\ker\varphi_U \xrightarrow{a_{U,V}} \ker\varphi_V \xrightarrow{a_{V,W}} \ker\varphi_W$$

maintenant, $a_{V,W} \circ a_{U,V} = r_{V,W} \circ r_{U,V} = r_{U,W} = a_{U,W}$.

Considérons $U \subset \cup_{i\in I} V_i$ un recouvrement de U par des ouverts. Soit $s,t \in \ker(\varphi_U)$ tel que $a_{U,V_i}(s) = a_{U,V_i}(t) \ \ \forall i \in I$. Alors, $r_{U,V_i}(s) = r_{U,V_i}(t)$ pour tout $i \in I$ d'où $s = t$.

Pour le même recouvrement de U, considérons cette fois la suite $(s_i \in (\ker\varphi)(V_i))_{i\in I}$ telle que : pour tout $i,j \in I, a_{V_i,V_i\cap V_j}(s_i) = a_{V_j,V_i\cap V_j}(s_j)$.

Dans ces conditions, pour tout $i,j \in I$, $r_{V_i,V_i\cap V_j}(s_i) = r_{V_j,V_i\cap V_j}(s_j)$. Donc il existe $s \in \mathcal{F}(U)$: $r_{U,V_i}(s) = s_i$. Il reste à montrer que $s \in (\ker\varphi)(U)$.

$\varphi_U(s) = r'_{U,V_i} \circ \varphi_U(s) = \varphi_{V_i} \circ r_{U,V_i}(s) = \varphi_V i(s_i) = 0$.

2. On va montrer à présent que $\widetilde{im}\,\varphi$ est un préfaisceau. Remarquons d'abord que $(\widetilde{im}\,\varphi)(U) = im\,\varphi_U$, les morphismes de restriction notés $b_{U,V}$ seront en fait les restrictions des $r'_{U,V}$, $V \subset U$ à $im\varphi_V$. On a $(\widetilde{im}\,\varphi)\{\varnothing\} = \mathrm{im}(\varphi_{\{\varnothing\}})$, or $\varphi_{\{\varnothing\}} : \{\varnothing\} \to \{\varnothing\}$. Donc $\widetilde{im}\,\varphi(\{\varnothing\}) = \{\varnothing\}$.

De plus, $b_{U,U} = r'_{U,U}|_{im_{\varphi_U}} = \mathrm{I}d_{im_{\varphi_U}}$.

Soient $W \subset V \subset U$ trois ouverts de X ; alors, pour tout $s' \in im\,\varphi_U$, il existe $s \in \mathcal{F}(U)$: $\varphi_U(s) = s'$.

Ainsi $r'_{U,V}(s') = r'_{U,V} \circ \varphi_U(s) = \varphi_V \circ r_{U,V}(s)$, ainsi $r'_{U,V}(\mathrm{im}(\varphi_U)) \subset \mathrm{im}(\varphi_V)$.

De même, $r'_{V,W}(\mathrm{im}(\varphi_V)) \subset \mathrm{im}(\varphi_W)$.

Ce qui légitimise la suite suivante :

$$im(\varphi_U) \xrightarrow{b_{U,V}} \mathrm{im}(\varphi_V) \xrightarrow{b_{V,W}} \mathrm{im}(\varphi_W)$$

Dès lors, $b_{V,W} \circ b_{U,V} = r'_{V,W} \circ r'_{U,V} = r'_{U,W} = b_{U,W}$. $\square$

Voici un exemple d'un morphisme de faisceaux φ pour lequel le préfaisceau $\widetilde{\mathrm{im}}\varphi$ n'est pas un faisceau.

Exemple 3.2. Considérons le faisceau $\mathcal{O}_X$ des fonctions holomorphes au-dessus de $X = \mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{O}_X^\times$ le faisceau des fonctions holomorphes au-dessus de X à valeurs dans $\mathbb{C}^\times := (\mathbb{C}\backslash\{0\},\cdot)$ (groupe multiplicatif des éléments inversibles). Pour tout ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$ on voit $\mathcal{O}_X(U)$ et $\mathcal{O}_X^\times(U)$ comme des groupes abéliens, le premier étant additif, le deuxième étant multiplicatif. On considère le morphisme exponentiel exp défini comme suit : pour tout ouvert U de $\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \exp_U : \mathcal{O}(U) &\to \mathcal{O}^\times(U) \\ s &\mapsto e^s : z \in U \mapsto e^{s(z)} \in \mathbb{C}^\times. \end{aligned}$$

Comme $\exp_U(s+t) = e^{s+t} = e^s e^t = \exp_U(s)\exp_U(t)$ il s'agit bel et bien d'un morphisme de faisceaux de groupes abéliens. Prenons maintenant l'ouvert $V := \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ et la section $z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathcal{O}_X^\times(V)$. Alors il est bien connu que tout germe de la fonction $\log z$ n'admet pas prolongement continu sur V tout entier. Ainsi, l'information locale donnée par $\log z$ ne peut être recollée sur V tout entier de sorte que $z \notin \exp_V(\mathcal{O}_X(V)) = (\widetilde{\mathrm{im}}\exp)(V)$, et donc que le préfaisceau $\widetilde{\mathrm{im}}\exp$ n'est pas une faisceau sur $\mathbb{C}$.

Proposition 3.1 (Faisceautisation)**.** Soit X, un espace topologique. Pour tout préfaisceau $\mathcal{F}$ de groupes abéliens au-dessus de X, il existe un faisceau minimal $\mathcal{F}^+$ au-dessus de X, tel que $\mathcal{F}$ est un sous préfaisceau de $\mathcal{F}^+$. Le faisceau $\mathcal{F}^+$ est appelé le faisceautisé de $\mathcal{F}$.

Définition 3.3. Le faisceau $(\widetilde{\mathrm{im}}\varphi)^+$ déduit du préfaisceaui $\widetilde{\mathrm{im}}\varphi$ sera simplement noté par $\mathrm{im}\,\varphi$ et appelé le faisceau image de φ.

3.1.2 La fibre en x d'un faisceau

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur un espace topologique X. On définit la relation $\sim$ par : si U et V sont deux ouverts de X contenant x, alors

$$s \in \mathcal{F}(U) \sim s' \in \mathcal{F}(V) \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe } x \in W \subset U \cap V \text{ ouvert tel que } r_{U,W}(s) = r_{V,W}(s').$$

On montre aisément que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Définition 3.4. Soit $x \in X$. On définit la fibre de $\mathcal{F}$ en x par :

$$\mathcal{F}_x := \bigsqcup_{U : x \in U} \mathcal{F}(U)/\sim .$$

Rappelons ici que $\sqcup$ désigne la réunion disjointe.

Intuitivement, $\mathcal{F}_x$ est l'ensemble de toutes les sections au-dessus de x, dans un petit voisinage de x. Les éléments de $\mathcal{F}_x$ sont appelés les germes de sections de $\mathcal{F}$ en x.

Le fibre $\mathcal{F}_x$ peut également être vu comme une limite directe. Afin de présenter ce point de vue nous aurons besoin de la définition suivante, extraite du chapitre 3 de [1] :

Définition 3.5. Soit $(I, \leq)$ un ensemble ordonné. Soit $\{X_i, i \in I\}$ une famille de groupes abéliens accompagnée des morphismes $f_{i,j}, i,j \in I$ tels que pour tout $i \leq j, f_{i,j} : X_i \to X_j$ satisfait les conditions suivantes :

1. $f_{i,i} = \mathrm{I}d_{X_i}$;

2. $\forall i \leq j \leq k, f_{j,k} \circ f_{i,j} = f_{i,k}$ (transitivité).

La limite directe de la famille $\{X_i, f_{i,j} \quad i,j \in I\}$, notée

$$\varinjlim_{i \in I} X_i,$$

est la donnée d'un couple $(X, \{\phi_i : X_i \to X, i \in I\})$ où X est un groupe abelien et ϕ_i est un morphisme de groupes tel que, si on se donne un autre couple $(Y,\{\psi_i : X_i \to Y, i \in I\})$ avec Y un groupe abélien et ψ_i des morphismes de groupes, alors il existe un unique morphisme $u : X \to Y$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "f_{i,j}"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[ddr, "\psi_i"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_j"'] \arrow[ddl, "\psi_j"] \\
& X \arrow[d, "u"] & \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Théorème 3.2. Soit X un ensemble, $x \in X$, $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens au-dessus de X. Alors

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} (\mathcal{F}(U), r).$$

Démonstration. On pose $I = \{U \subset X : x \in U\}$ le sous ensemble de l'ensemble des parties de X partiellement ordonné par l'inclusion $(U \leq V \Leftrightarrow V \supseteq U)$. Pour tout $U \in I$, on prend $X_U = \mathcal{F}(U)$. Définissons ϕ_U par :

$$\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x : s \mapsto \overline{s}$$

où $\overline{s}$ désigne le germe de la fonction, égale à s dans un petit voisinage de x. Si $V \subset U \subset X$, on prend $f_{U,V} = r_{U,V}$. Il est clair que $\{f_{U,V}, U,V \in I\}$ satisfait les conditions 1 et 2 de la définition 3.5.

On considère maintenant le couple $(F, \{\psi_U : \mathcal{F}(U) \to F\})$ où ψ_U est un morphisme de groupes abéliens. Définissons $u : \mathcal{F}_x \to F$ de la manière suivante : pour tout $s \in \mathcal{F}(U)$, $u(\overline{s}) := \psi_U(s)$, tout ceci fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[rr, "f_{U,V}"] \arrow[dr, "\phi_U"] \arrow[ddr, "\psi_U"'] & & \mathcal{F}(V) \arrow[dl, "\phi_V"'] \arrow[ddl, "\psi_V"] \\
& \mathcal{F}_x \arrow[d, "u"] & \\
& F &
\end{tikzcd}$$

Ceci montre que $\mathcal{F}_x$ satisfait bien la propriété universelle. □

3.1.3 Faisceaux cohérents

Soit A un anneau communtatif et unitaire. Rappelons qu'un A-module M est dit de type fini si il existe un sous-ensemble fini $\{m_1, \ldots, m_n\} \subseteq M$ tel que

$$M = \sum_{i=1}^{n} Am_i.$$

La définition de faisceau cohérent donnée plus bas sera modelée sur cette notion de A-module de type fini.

Exemples 3.2. On considère l'anneau $A = \mathbb{Z}$.

1. Tout groupe abélien fini peut être vu comme un $\mathbb{Z}$-module de type fini.
2. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ne sont des $\mathbb{Z}$-modules de type fini.

Définition 3.6. Soit X, un espace topologique. Un faisceau $\mathcal{A}$ d'anneaux commutatifs est la donnée, pour tout ouvert U de X, d'un anneau commutatif $\mathcal{A}(U)$, telle que les conditions (1),(2),(3),(4) et (5) de la Définition 3.1 soient satisfaites.

Définition 3.7. Soit X un espace topologique, $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux commutatifs au-dessus de X. Un faisceau $\mathcal{F}$ au-dessus de X est un faisceau de $\mathcal{A}$-modules si pour tout ouvert $U \subset X$, $\mathcal{F}(U)$ est un $\mathcal{A}(U)-$module compatible avec les morphismes de restriction, i.e., que pour tout $V \subset U$, et tout $a \in \mathcal{A}(U)$ et $t \in \mathcal{F}(U)$, on a que $(a \cdot t)|_V = a|_V \cdot t|_V$.

Exemple 3.3. Le faisceau $\mathcal{O}_X$ de fonctions holomorphes sur une variété complexe X est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules sur X.

Définition 3.8. Soit X un espace topologique et $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{A}$-modules. Soit $((s_i)_{i\in I}) \subset \mathcal{F}(X)$ une famille de sections globales. On dira que $\mathcal{F}$ est engendré par la famille de sections $(s_i)_{i\in I}$ si pour tout $x \in X$, la famille $((s_i)_x)_{i\in I}$ des germes en x , engendre la fibre $\mathcal{F}_x$ en tant que $\mathcal{A}_x$-module.

Définition 3.9. Considérons un espace topologique X, $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{A}$-modules sur X. $\mathcal{F}$ est dit de type fini s'il est localement engendré par un nombre fini de sections en tant que faisceau. Cela veut dire que, pour tout $x \in X$, il existe un ouvert $x \in U \subseteq X$ et des sections $s_1,...,s_n \in \mathcal{F}(U)$ telles que, pour tout $y \in U$, les germes des sections $s_1,...,s_n$ dans $\mathcal{F}_y$ engendrent $\mathcal{F}_y$ en tant que $\mathcal{A}_y$-modules.

Définition 3.10. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{A}$-modules sur un espace topologique X, U un ouvert de X, $s_1, \ldots, s_n$ des $\mathcal{F}$-sections au-dessus de U. Cette donnée définit un morphisme de $\mathcal{A}(U)$-modules

$$\begin{aligned} \varphi_U : (\mathcal{A}(U))^n &\to \mathcal{F}(U) \\ (f_1,...,f_n) &\mapsto \sum f_i s_i \end{aligned}$$

Pour $V \subset U$ ouvert, la règle $V \mapsto \ker(\varphi_V)$ donne lieu à un faisceau de relations $\mathcal{R}(s_1,...,s_n)$ sur U. Notons que $\mathcal{R}(s_1,...,s_n)$ est un faisceau de $\mathcal{A}|_U$-modules sur U. Ici, $\mathcal{A}|_U$ désigne la restriction du faisceau $\mathcal{A}$ sur l' ouvert $U \subset X$, et dont les morphismes de restriction sont obtenus des morphismes de restriction de $\mathcal{A}$, restreints à U.

$\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(1) $\mathcal{F}$ est de type fini ,

(2) Pour tout ouvert $U \subset X$ et toute collection finie de sections $s_1,...,s_n \in \mathcal{F}(U)$, le faisceau $\mathcal{R}(s_1,...,s_n)$ est un $\mathcal{A}|_U$-module de type fini.

Théorème 3.3 (K. Oka, voir [7, Théorème 3.19])**.** Pour toute variété analytique X, le faisceau $\mathcal{O}_X$ des fonctions holomorphes sur X est cohérent.

Exemple 3.4. Donnons un exemple simple d'un faisceau d'anneau qui n'est pas cohérent sur lui-même. On considère l'espace topologique à un point $X = \{0\}$ où $0 \in \mathbb{R}$. On considère A l'anneau des germes de fonctions lisses sur $\mathbb{R}$ au voisinage de 0. Il s'agit d'un anneau local. Comme X est réduit en un seul point, l'anneau A peut être identifié avec le faisceau d'anneau correspondant au-dessus de 0. On va maintenant montrer que l'anneau A n'est pas cohérent en tant que A-module. On considère la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

On peut voir f comme élément de A. On considère le morphisme de A-module suivant :

$$\begin{aligned} [f] : A &\to A \\ a &\mapsto fa \end{aligned}$$

On va montrer que $\ker[f]$ n'est pas un A-module de type fini et donc ceci montrera que A n'est pas un A-module cohérent. Commençons par donner une observation simple. Soit $h \in A$ tel que $h(0) = 0$. On utilisera $x \in \mathbb{R}$ comme carte locale sur $\mathbb{R}$.

$$h(x) = x \cdot \widetilde{h}(x) \tag{3.1}$$

pour une fonction $\widetilde{h} \in A$. En effet, on a

$$h(x) = h(x) - h(0) = \int_0^x h'(t)dt = \int_0^1 h'(xt)d(xt) = x \int_0^1 h'(xt)dt.$$

Posons $\widetilde{h}(x) := \int_0^1 h'(xt)dt$, en utilisant l'hypothèse que h est C^∞ au voisinage de 0, alors par induction et en dérivant sous l'intégrale on montre aisément que $\widetilde{h}(x)$ est encore infiniment différentiable au voisinage de 0. Ainsi on peut voir $\widetilde{h}$ comme un élément de A.

Posons $I = \ker[f]$. Alors I est un A-module (en fait c'est même un idéal de A). Notons que $I \neq \{0\}$ car par exemple $f(-x) \in I$. Soit $g \in I$. Alors par définition de l'idéal I on a que

$$g(x)f(x) \equiv 0 \ \text{(identiquement nulle)}$$

pour un voisinage de 0. Comme $f(x) > 0$ pour $x > 0$, ceci force $g(x) = 0$ pour tout $x \in (0,\epsilon)$ pour un $\epsilon > 0$ suffisamment petit. Par continuité on doit avoir $g(0) = 0$. De l'observation (3.1) on tire que

$$g(x) = x \cdot \widetilde{g}(x), \tag{3.2}$$

pour une fonction $\widetilde{g}(x) \in A$. Comme $g(x) = 0$ pour $x \in [0,\epsilon)$ il suit de (3.2) que l'on doit aussi avoir $\widetilde{g}(x) = 0$ pour $x \in [0,\epsilon)$ et donc en fait $\widetilde{g}(x) \in I$. Ceci montre donc que $I = xI$. Nous désirons maintenant utiliser le lemme de Nakayama, rappelons-le :

Lemme 3.1. (Lemme de Nakayama) Soit R un anneau communtatif et unitaire. Soit $J \subseteq R$ un idéal et M un R-module. Posons

$$JM := \left\{ \sum_{\text{finie}} r_i m_i \in M : r_i \in J, m_i \in M \right\} \leq M.$$

Notons que JM est un sous R-module de M. Alors, si $JM = M$ et M est un R-module de type fini, il existe $a \in J$ tel que pour tout $m \in M$, $(1 + a)m = 0$.

Nous pouvons maintenant conclure la preuve. Si I était un A-module de type fini, alors par le lemme de Nakayama, $(1 + xg)I = \{0\}$ pour un certain $xg \in I$. Or ceci est absurde car $1 + xg$ est inversible dans A, et donc on aurait $I = \{0\}$, contradiction.

□

3.2 Cohomologie de Čech d'un faisceau

3.2.1 Homologie, cohomologie

Soit $\mathcal{C}_n$ ($n \in \mathbb{Z}$) des groupes abéliens.

a) Un complexe de chaînes est la donnée d'une suite

$$\dots \overset{\partial_{n+2}}{\to} \mathcal{C}_{n+1} \overset{\partial_{n+1}}{\to} \mathcal{C}_n \overset{\partial_n}{\to} \mathcal{C}_{n-1} \overset{\partial_{n-1}}{\to} \dots$$

où ∂_n sont des morphismes de groupes abéliens tels que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ pour tout n.

b) Un complexe de cochaînes est la donnée d'une suite

$$\dots \leftarrow \mathcal{C}^{n+1} \overset{d_n}{\leftarrow} \mathcal{C}^n \overset{d_{n-1}}{\leftarrow} \mathcal{C}^{n-1} \leftarrow \dots$$

où d_n sont des morphismes de groupes abéliens tels que $d_{n+1} \circ d_n = 0$ pour tout n.

Les morphismes ∂_n sont appelés les opérations de bord et les d_n sont appelés les opérations de cobord.

Si $\mathcal{C}$ est un complexe de chaînes, on note :

$$Z_n := \ker(\partial_n), \quad B_n := im(\partial_{n+1}) \quad \text{et} \quad H_n := Z_n/B_n.$$

Si $\mathcal{C}$ est un complexe de cochaînes, on note

$$Z^n := \ker(d_n), \quad B^n := im(d_{n-1}) \quad \text{et} \quad H^n := Z^n/B^n.$$

Les éléments de Z_n sont appelés les $n-$cycles, les éléments de Z^n les $n-$cocycles, les éléments de B_n les $n-$bords, les éléments de B^n les $n-$cobords. Les groupes H_n sont appelés les groupes d'homologie tandis que H^n sont les groupes de cohomologie.

3.2.2 Morphisme de complexes

Définition 3.11. Considérons deux complexes de chaînes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Un morphisme de chaînes de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ est la donnée pour tout entier n, d'un morphisme de groupes $f_n : \mathcal{C}_n \to \mathcal{D}_n$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\dots & \mathcal{C}_{n+2} \arrow[r, "\partial_{n+2}"] \arrow[d, "f_{n+2}"'] & \mathcal{C}_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & \mathcal{C}_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"'] & \mathcal{C}_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \dots \\
\dots & \mathcal{D}_{n+2} \arrow[r, "\partial'_{n+2}"] & \mathcal{D}_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & \mathcal{D}_n \arrow[r, "\partial'_n"] & \mathcal{D}_{n-1} \arrow[r, "\partial'_{n-1}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Définition 3.12. Soit R, un anneau commutatif unitaire. Un R-module différentiel est un couple (M,d) où M est un R-module et $d : M \to M$ est un endomorphisme de R-modules tel que

$$d \circ d = 0.$$

Si (M,d) et (N,d') sont deux R-modules différentiels. un morphisme de modules différentiels entre ces deux modules est un morphisme de R-modules $\varphi : M \to N$ tel que

$$d' \circ \varphi = \varphi \circ d.$$

Si (M,d) est un R-module différentiel, $\ker d$ sera noté par $Z(M)$ et $\operatorname{im} d$ par $B(M)$. Naturellement, $B(M) \leq Z(M)$. Ceci nous permet de définir $H(M) := Z(M)/B(M)$.

Si $\varphi : (M,d) \to (N,d')$ est un morphisme de modules différentiels, en utilisant la relation $d' \circ \varphi = \varphi \circ d$, il est facile de vérifier que $\varphi(Z(M)) \subset Z(N)$ et $\varphi(B(M)) \subset B(N)$, donc φ induit un morphisme de groupes d'homologies (ou de cohomologies).

$$\begin{array}{rcl} H(\varphi) : H(M) & \to & H(N) \\ \overline{m} & \mapsto & \overline{h(m)} \end{array}$$

Définition 3.13. Deux morphismes de R-modules différentiels $\varphi, \psi : M \to N$ sont dits homotopes s'il existe s'il existe un morphisme de R-modules $h : M \to N$ tel que

$$d' \circ h + h \circ d = \varphi - \psi.$$

Dans cette situation, pour tout cocycle $z \in Z(M)$,

$$\varphi(z) - \psi(z) = d' \circ h(z) + h \circ d(z) = d' \circ h(z)$$

car $d(z) = 0$.

Donc $\varphi(z) - \psi(z) \in B(N) \Rightarrow H(\varphi)(z) - H(\psi)(z) = 0$. Ceci nous permet de conclure que si φ et ψ sont homotopes, alors $H(\varphi)$ et $H(\psi)$ coïncident.

3.2.3 Cohomologie de Čech d'un faisceau

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur un espace topologique X, $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X ; on notera $U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_p}$ par $U_{i_0,i_1,\ldots,i_p}$. Si s est une section, alors $s|_{U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p}}$ sera noté $s_{i_0,\ldots,i_p}$. Pour tout entier relatif p, on définit

(a) Si $p < 0$, posons $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \{0\}$.

(b) Si $p \geq 0$, $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ désigne l'ensemble des suites de sections

$$s = (s_{i_0,\ldots,i_p}) \in \prod_{\substack{(i_0,\ldots,i_p) \in I^{p+1} \\ \forall l \neq k,\ i_l \neq i_k}} \mathcal{F}(U_{i_0,\ldots,i_p}).$$

On munit $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ de la loi d'addition des sections.

Définition 3.14. $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ est un groupe abélien appelé groupe des p-cochaînes de Čech relativement au recouvrement $\mathcal{U}$.

3.2.4 La différentielle de Čech

Définition 3.15. Pour tout entier relatif p, on définit :

$$\delta^p : C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

de la façon suivante : si $p < 0$, alors

$$\delta^p = 0;$$

si $p \geq 0$, alors

$$(\delta^p(s))_{i_0,\ldots,i_{p+1}} = \sum_{0 \leq j \leq p+1} (-1)^j s_{i_0,\ldots i_{j-1},\hat{i}_j,i_{j+1},\ldots,i_{p+1}}|_{U_{i_0,\ldots,i_{p+1}}}$$

où $\widehat{i}_j$ signifie que l'on omet d'écrire l'indice i_j

Pour toute permutation σ de $\{0,1,\ldots,p\}$, $(\delta^p s)_{i_{\sigma(0)},\ldots,i_{\sigma(p)}} = \varepsilon(\sigma)(\delta^p s)_{i_0,\ldots,i_p}$ où $\varepsilon(\sigma)$ correspond correspond au signe de la permutation σ.

Proposition 3.2. Pour tout $p \in \mathbb{Z}, \delta^{p+1} \circ \delta^p = 0$.

Démonstration. Si $p < 0$ le résultat est évident car $\delta^p = 0$. Soit $p \geq 0$ et soit $s \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$. On rappelle que les composantes de s sont indexées par des $(p+1)$-uplets. Ainsi les composantes de $\delta^{p+1} \circ \delta^p(s)$ sont indexées par des $(p+3)$-uplets. Soit $\underline{i} = (i_0,i_1,\ldots,i_{p+1},i_{p+2}) \in I^{p+3}$ un tel $(p+3)$-uplets d'élément dans I que l'on fixe. On conviendra de dire que l'indice i_k dans $\underline{i}$ est placé en position $k+1$. Si on omet d'écrire les morphismes de restriction (dans le simple but d'alléger la notation) on trouve

$$\begin{aligned}
(\delta^{p+1}(\delta^p s))_{i_0,i_1,\ldots,i_{p+2}} &= \sum_{k=0}^{p+2} (-1)^k (\delta^p s)_{i_0,i_1,\ldots,i_{k-1},\widehat{i_k},i_{k+1}\ldots,i_{p+1},i_{p+2}} \\
&= \sum_{k=0}^{p+2} (-1)^k \sum_{\substack{j=0 \\ k \neq j}}^{p+2} (-1)^{j^*} s_{i_0,i_1,\ldots,\widehat{a},\ldots,\widehat{b},\ldots,i_{p+2}} \\
&\sum_{k=0}^{p+2} \sum_{\substack{j=0 \\ k \neq j}}^{p+2} (-1)^{k+j^*} s_{i_0,i_1,\ldots,\widehat{a},\ldots,\widehat{b},\ldots,i_{p+2}}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

où $\{a,b\} = \{i_j,i_k\}$ et où j^* correspond à la position de i_j dans le $(p+1)$-uplets

$$(i_0,i_1,\ldots,\widehat{a},\ldots,\widehat{b},\ldots,i_{p+2}). \tag{3.4}$$

Si i_j est placé devant i_k dans (3.4) alors $j^* = j$; autrement si i_j est placé après i_k dans (3.4) alors $j^* = j-1$. Il suit donc de cette observation que les termes dans (3.3) s'annulent deux à deux et donc $(\delta^{p+1}(\delta^p s))_{i_0,i_1,\dots,i_{p+2}} = 0$. Comme le $(p+3)$-uplets $\underline{i}$ était quelconque il suit que $(\delta^{p+1}(\delta^p s)) = 0$. □

3.2.5 Complexe de cochaînes de Čech

Définition 3.16. Posons

$$C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}).$$

On définit l'endomorphisme δ de $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$ de la manière suivante : pour tout p et tout $s \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \subseteq C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$,

$$\delta(s) = \delta^p(s),$$

puis après on étent à tout $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$ par additivité. Alors, $(C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}), \delta)$ est appelé complexe de cochaines de Čech de $\mathcal{F}$ relativement au recouvrement $\mathcal{U}$;

$$\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) := H^p(C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})) = \ker \delta^p / \mathrm{im}\delta^{p-1}$$

est le p-ième groupe de cohomologie de Čech de $\mathcal{F}$ relativement au recouvrement $\mathcal{U}$.

Définition 3.17. Les éléments de $\ker \delta^p$ ont appelés les p-cocycles et les éléments de $\mathrm{im}\delta^{p-1}$ ont appelées les p-cobords.

Considérons un autre recouvrement $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ plus fin que $\mathcal{U} = (U)_{i\in I}$ au sens que $J \subset I$ et il existe une injection $\rho : J \to I$ vérifiant $V_j \subset U_{\rho(j)}$ pour tout $j \in J$; ρ induit un morphisme $\rho^\bullet$ de groupes de cochaines de Čech de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} \rho^\bullet : C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \to & C^\bullet(\mathcal{V},\mathcal{F}) \\ s = (s_{j_0,\dots,j_p}) \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \mapsto & \rho^p(s) = (s_{\rho(j_0),\dots,\rho(j_p)})|_{V_{j_0,\dots,j_p}} \in C^p(\mathcal{V},\mathcal{F}). \end{array}$$

Propriété 1. $\delta \circ \rho^\bullet = \rho^\bullet \circ \delta$.

Démonstration. En effet, pour tout $s = (s_{j_0,\dots,j_p}) \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$, on a d'une part

$$\begin{array}{rcl} (\delta \circ \rho^\bullet(s))_{j_0,\dots,j_{p+1}} & = & (\delta \circ \rho^p(s))_{j_0,\dots,j_{p+1}} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k (\rho^p(s))_{j_0,\dots,\hat{j}_k,\dots,j_{p+1}} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k s_{\rho(j_0),\dots,\widehat{\rho(j_k)},\dots\rho(j_{p+1})} \end{array}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}(\rho^\bullet \circ \delta(s))_{j_0,\ldots,j_{p+1}} &= (\rho^{p+1} \circ \delta^p(s))_{j_0,\ldots,j_{p+1}} \\ &= (\delta^p(s))_{\rho(j_0),\ldots,\rho(j_{p+1})} \\ &= \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k s_{\rho(j_0),\ldots,\widehat{\rho(j_k)},\ldots,\rho(j_{p+1})},\end{aligned}$$

d'où l'égalité. □

Lemme 3.2. Si $\rho, \rho' : J \to I$ sont deux injections telles que pour tout $j \in J, V_j \subset U_{\rho(j)} \cap U_{\rho'(j)}$, alors $\rho^\bullet$ et $\rho'^\bullet$ sont homotopes au sens de la Définition 3.13, voir [7].

Ceci nous permet de vérifier que

$$H^p(\rho'^\bullet) = H^p(\rho^\bullet) : \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = H^p(C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})) \to H^p(C^\bullet(\mathcal{V},\mathcal{F})) = \check{H}^p(\mathcal{V},\mathcal{F})$$

Définition 3.18. Soit X une variété complexe, $\mathcal{F}$ un fibré au-dessus de X et p un entier. On désigne par Λ l'ensemble des recouvrements de X. Il s'agit d'un ensemble partiellement ordonné par la relation $<$ définie par $\mathcal{V} := (V_j)_{j\in J} < \mathcal{U} := (U_i)_{i \in I} \Leftrightarrow$ il existe une injection $\rho : J \to I$ tel que pour tout $j \in J, V_j \subset U_{\rho(j)}$.

Le p-ième groupe de cohomologie de Čech de X relativement au faisceau $\mathcal{F}$ est défini par

$$\check{H}^p(X,\mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{U}\in\Lambda} \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

(voir la Définition 3.5 pour la notion de limite directe).

Chapitre 4

Variétés de Stein

4.1 Variétés de Stein

Soit une variété complexe X. On désigne par $\mathcal{O}(X)$ l'ensemble de toutes les fonctions holomorphes sur X.

Définition 4.1. X est une variété de Stein si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(1) X est holomorphiquement convexe, c'est-à-dire pour tout compact $K \subset X$,

$$\widehat{K} := \{z \in X : |f(z)| \leq \sup_K |f| \text{ pour tout } f \in \mathcal{O}(X)\}$$

est aussi compact dans X.

(2) X est holomorphiquement séparable, c'est-à-dire pour tout x, $y \in X$, $x \neq y$ il existe une fonction $f \in \mathcal{O}(X)$ telle que

$$f(x) \neq f(y).$$

Théorème 4.1 ([9, Vol.III, Ch. E et Ch. O])**.** Une variété complexe X est une variété de Stein si et seulement si pour tout faisceau analytique cohérent $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_X$ on a

$$\check{H}^1(X,\mathcal{F}) = 0.$$

Théorème 4.2. Si X est une variété de Stein, Y une sous variété complexe de X de dimension $\dim Y \leq n - 1$, alors toute fonction holomorphe f sur Y peut s'étendre en une fonction holomorphe F sur X.

Démonstration. 1. Il existe un recouvrement ouvert connexe $\{U_j\}$ de X et des fonctions $F_j \in \mathcal{O}(U_j)$ telles que $F_j = f$ sur $Y \cap U_j$. Pour construire F_j on peut choisir les cartes (U_j,φ_j) tels que $\varphi_j(Y \cap U_j)$ est l'intersection de $\varphi_j(U_j) \subset \mathbb{C}^n$ avec un sous-espace linéaire de $\mathbb{C}^n$. La construction d'un prolongement holomorphe $\tilde{F}_j$ de $F \circ \varphi_j^{-1}$ de $\varphi_j(Y \cap U_j)$ à $\varphi_j(U_j)$ est triviale (la projection est une application holomorphe). On prend $F_j := \tilde{F}_j \circ \varphi_j$.

2. La famille des F_j satisfait $F_i - F_j = 0$ sur $Y \cap U_i \cap U_j$. Posons

$$f_{ij} := F_i - F_j \quad \text{sur } U_i \cap U_j,$$

alors $f_{ij} \in \mathcal{I}_Y(U_i \cap U_j)$ où $\mathcal{I}_Y$ est le faisceau de germes des fonctions holomorphes sur X qui s'annulent sur Y. Sur $U_i \cap U_j \cap U_k$ nous avons

$$f_{ij} + f_{jk} = F_i - F_k = f_{ik},$$

donc $\{f_{ij}\}$ en un cocycle. Le faisceau $\mathcal{I}_Y$ est analytique cohérent (voir [9, théorème 11, Vol. III, Ch. B]). Alors il existe un raffinement $\{V_m\}$ de $\{U_i\}$ (c'est-à-dire $V_m \subset U_{i_m}$ pour un certain i_m, pour tout m) et une famille de fonctions $H_m \in \mathcal{I}_Y(V_m)$ qui résolvent le cocycle : $f_{i_m i_n} = H_m - H_n$. Posons $F := F_{i_m} - H_m$ sur V_m. F est holomorphe sur X et pour tout $z \in Y \cap V_m$,

$$F(z) = F_{i_m}(z) - H_m(z) = f(z) - H_m(z) = f(z)$$

car $H_m = 0$ sur $Y \cap V_m$. Donc, la fonction F est un prolongement holomorphe de f. $\square$

4.2 Exemple : ensembles pseudo-convexes

Définition 4.2. Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{C}$. Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite sous-harmonique si

1) u est semi-continue supérieurement, c'est-à-dire pour tout $x_0 \in \Omega$

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0),$$

2) pour tout $a \in \Omega$ il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $r < r_0$

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(a,r)} u(x) ds_x,$$

où ds_x correspond à l'élément de longueur et où x correspond au jeu de coordonnées standards $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Proposition 4.1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors u est sous harmonique si et seulement si

$$\Delta u \geq 0 \quad \text{sur } \Omega$$

Ici $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ où on identifie $z = x_1 + \mathrm{i}\, x_2 \in \mathbb{C}$ avec $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Démonstration. Supposons que $\Delta u \geq 0$ sur Ω. Fixons $a \in \Omega$ et $r_0 > 0$ tels que $B(a,r_0) \subset \Omega$. Définissons la fonction

$$h(r) := \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(a,r)} u(x) ds_x, \quad 0 \leq r \leq r_0.$$

Par le théorème de moyenne du calcul à plusieurs variables, $\lim\limits_{r \to 0} h(r) = u(a)$. De plus, h est de classe C^2 sur $]0,r_0[$. On va montrer que la fonction $h(r)$ est croissante en r en calculant sa dérivée par rapport à r. Soit $B(a,r)$ une boule fixée de rayon r pour $r < r_0$. Par le théorème de Green, on a

$$\int_{B(a,r)} \Delta u \, dx_1 dx_2 = \int_{\partial B(a,r)} \frac{\partial u}{\partial n} ds_x. \tag{4.1}$$

En combinant l'égalité (4.1) et l'hypothèse que $\Delta u \geq 0$ sur $B(a,r)$ on déduit

$$0 \leq \frac{1}{r} \int_{\partial B(a,r)} \frac{\partial u}{\partial n}(x) ds_x = \int_{\partial B(0,1)} \frac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\rho = r} (a + \rho x') ds_{x'}, \tag{4.2}$$

où x' est sur le cercle unité et où $ds_x = r ds_{x'}$. De l'égalité (4.2) on tire que

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{\partial B(0,1)} \frac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\rho = r} (a + \rho x') ds_{x'} &= \frac{\partial}{\partial \rho}\Big|_{\rho = r} \int_{\partial B(0,1)} u(a + \rho x') ds_{x'} \\ &= 2\pi \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}\Big|_{\rho = r} \left(\frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(0,1)} u(a + \rho x') r ds_{x'} \right) \\ &= 2\pi \frac{\partial}{\partial \rho} h(\rho). \end{aligned}$$

Ainsi $r \mapsto h(r)$ est une fonction croissante ; ce qui nous donne

$$u(a) = h(0) \leq h(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(a,r)} u(x) ds_x.$$

Supposons maintenant qu'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $\Delta u(z_0) < 0$. Puisque $u \in C^2(\Omega)$, Δu est continue sur Ω. Ainsi il existe $r_0 > 0$ tel que $B_0 := B(z_0, r_0) \subset \Omega$ et pour tout $z \in B_0$, $\Delta u(z) < 0$. La fonction h définie plus haut sera alors strictement décroissante dans l'intervalle $]0, r_0[$. Ainsi pour tout $0 < r < r_0$ fixé, $\lim\limits_{\rho \to 0} h(\rho) > h(r)$, c'est-à-dire $u(a) > \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(a,r)} u(x) ds_x$, une contradiction. $\square$

Définition 4.3. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert. Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite pluri sous-harmonique si

1) u est sémi-continue supérieurement,

2) pour toute droite complexe $L \subset \mathbb{C}^n$ la restriction $u|_{\Omega \cap L}$ est sous-harmonique.

Définition 4.4. Un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ est dit pseudo-convexe s'il existe une fonction à valeurs réelles $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ pluri sous-harmonique telle que pour tout $c \in \mathbb{R}$ le sous-ensemble $\{z \in \Omega : u(z) < c\}$ est relativement compact dans Ω.

Définition 4.5. Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est un domaine d'holomorphie si pour tout ouvert connexe U qui rencontre la frontière de Ω, et pour toute composante connexe W de $U \cap \partial\Omega$, il existe une fonction h holomorphe sur Ω telle que $h|_W$ n'admet pas d'extension holomorphe sur U.

Théorème 4.3 ([7, théorème 6.11])**.** Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$, alors Ω est holomorphiquement convexe si et seulement si Ω est un domaine d'holomorphie.

Théorème 4.4 ([7, théorème 9.11])**.** Un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ est un domaine d'holomorphie si et seulement si Ω est pseudo-convexe.

Les deux derniers résultats nous permettent de dire qu'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est une variété de Stein si et seulement si Ω est holomorphiquement convexe ou pseudo-convexe pusique Ω est déjà holomorphiquement séparable en tant que sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$.

Chapitre 5

Fibrés vectoriels holomorphes de Banach

L'exposition dans ce chapitre suit [14].

5.1 Fonctions holomorphes à valeurs dans un espace de Banach

Définition 5.1. Soit B un espace complexe de Banach, X une variété complexe de dimension n. Une fonction $f : X \to B$ est dite holomorphe si pour toute fonctionnelle $\varphi \in B^*$, $\varphi(f)$ est holomorphe. Ici B^* correspond à l'espace des fonctionnelles linéaires continues et à valeurs complexes sur B.

Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+ := \{0,1,2,\ldots\}$, un multi-indice. Posons

$$f^{(\alpha)}(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n),$$

où $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Pour tout ouvert Ω dans X, une fonction holomorphe f à valeurs dans B définie sur Ω, et un polydisque $P \subset \Omega$, $P = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \ : |z_j - x_j| \leq r_j, r_j > 0, 1 \leq j \leq n\}$, on a la formule de Cauchy

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{\alpha!}{(2i\pi)^n} \int_{|w_1 - x_1| = r_1} \cdots \int_{|w_n - x_n| = r_n} \frac{f(w)}{(w_1 - x_1)^{\alpha_1 + 1} \ldots (w_n - x_n)^{\alpha_n + 1}} dw_1 \ldots dw_n,$$

où $\alpha! := \alpha_1! \ldots \alpha_n!$. En particulier,

$$f(x) = f^{(0)}(x) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{|z_1 - x_1| = r_1} \cdots \int_{|z_n - x_n| = r_n} \frac{f(w)}{(w_1 - x_1) \ldots (w_n - x_n)} dw_1 \ldots dw_n.$$

5.2 Fibrés vectoriels de Banach

Soient B et F deux espaces de Banach. Notons par $\mathcal{B}(B,F)$ l'espaces des opérateurs linéaires bornés allant de B vers F.

On aura besoin de définitions suivantes.

1. Soient X_0 et E deux espaces topologiques et

$$p : E \to X_0,$$

une application continue. On suppose que pour tout $x \in X_0$ $p^{-1}(x)$ est muni de la structure d'un espace de Banach dont la topologie coïncide avec la topologie induite par E.

On dit qu'un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de X est trivialisant pour p si pour tout α il existe un espace de Banach B_α et un homéomorphisme $\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times B_\alpha$ tel que

1) le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, "p"'] & & U_\alpha \times B_\alpha \arrow[dl, "\nu"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

où ν est la projection naturelle vers U_α, où pour tout $x \in U_\alpha$ l'application φ_α détermine sur $p^{-1}(x)$ une isomorphisme $\varphi_{\alpha x}$ des espaces de Banach entre $p^{-1}(x)$ et B_α ;

2) pour toute paire d'ouverts U_α et U_β du recouvrement de X_0, l'application $U_\alpha \cap U_\beta \to \mathcal{B}(B_\alpha,B_\beta)$ définie par

$$x \mapsto (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x)$$

est continue par rapport à la norme des opérateurs.

Les applications φ_α sont appelées les trivialisations. Les applications

$$x \mapsto (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x) =: \varphi_{\alpha\beta}(x)$$

sont appelés les fonctions de transition.

On dit que les deux recouvrements de X sont équivalents si leur réunion satisfait les conditions 1) et 2). Une classe d'équivalence de recouvrements trivialisants détermine un fibré vectoriel topologique (E,p,X_0) au-dessus de X_0.

Si X_0 est connexe, alors tous les espaces B_α sont isomorphes et donc peuvent être identifiés avec un seul espace de Banach B. Dans ce cas on dit que $E \xrightarrow{p} X_0$ (ou simplement E) est un fibré vectoriel de Banach topologique de fibre B au-dessus de X_0. *Dans ce qui suit on suppose que X_0 est connexe.*

2. Un morphisme

$$A : E_1 \to E_2$$

entre deux fibrés vectoriels de Banach $E_i \overset{p_i}{\to} X_0$ $(i = 1{,}2)$ est une application continue de E_1 à E_2 telle que

i) $p_2 \circ A = p_1$;

ii) pour tout $x \in X_0$ l'application $A_x : p_1^{-1}(x) \to p_2^{-1}(x)$ est linéaire et continue ;

iii) il existe des trivialisations

$$\varphi^{(i)} : p_i^{-1}(U) \to U \times B_i \qquad (i = 1{,}2)$$

telles que l'application

$$x \mapsto \varphi_x^{(2)} \circ A_x \circ (\varphi_x^{(1)})^{-1}$$

est continue par rapport à la norme des opérateurs.

Un morphisme $A : E_1 \to E_2$ qui est une bijection de E_1 à E_2 est appelé un isomorphisme de fibrés vectoriels de Banach topologiques. Dans ce cas on dit que $E_1 \overset{p_1}{\to} X_0$, $E_2 \overset{p_2}{\to} X_0$ sont isomorphes.

3. Une section d'un fibré vectoriel $E \overset{p}{\to} X_0$ est une application continue $f : X_0 \to E$ qui est l'inverse à droite de p :

$$p \circ f = \mathrm{Id}_{X_0}.$$

4. Si $p_1 : E_1 \to X_0$ et $p_2 : E_2 \to X_0$ sont deux fibrés vectoriels, leur somme directe (ou somme de Whitney) est le fibré vectoriel au-dessus de X_0 défini par

$$E_1 \oplus E_2 := \{(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, p_1(x_1) = p_2(x_2)\},$$

la projection $p : E_1 \oplus E_2 \to X_0$ étant définie par

$$p(x_1{,}x_2) := p_1(x_1) = p_2(x_2).$$

5.3 Variétés complexes de Banach

1. Soient B et F deux espaces de Banach complexes, U un ouvert dans B et

$$\psi : U \to F$$

une application continue. On dit que ψ est holomorphe si sa restriction sur l'intersection de U avec toute droite complexe $L \subseteq B$ (L étant munie ici de sa structure complexe naturelle) est une fonction holomorphe à valeurs dans F.

2. Soit X un espace topologique Hausdorff, V un ouvert dans X. Un homéomorphisme $\varphi : V \to U$ où U est un ouvert dans un espace de Banach B est appelé une B-carte de X.

Deux B-cartes $\varphi_1 : V_1 \to U_1$, $\varphi_1 : V_2 \to U_2$ sur X sont compatibles si l'application $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ de $\varphi_2(V_1 \cap V_2) \subset U_2 \subset B$ à B est biholomorphe. Dans le cas où $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, alors les deux B-cartes sont automatiquement dites compatibles.

Un B-atlas de X est une collection de B-cartes compatibles qui recouvrent X.

Deux B-atlas sont dits compatibles si leurs B-cartes sont compatibles. Le choix d'une classe d'équivalence de B-atlas détermine sur X une structure de variété complexe de Banach de type B.

3. Soient X et Y deux variétés complexes de Banach de type B. Une application $g : X \to Y$ est dite holomorphe si pour toute paire de B-cartes $\varphi : V \to U$, une B-carte sur X, et $\psi : V' \to U'$, une B-carte sur Y, l'application

$$h := \psi \circ g \circ \varphi^{-1} \quad \text{sur} \quad \varphi(V \cap g^{-1}(V'))$$

est holomorphe.

5.4 Fibrés vectoriels holomorphes de Banach

1. Soit $E \xrightarrow{p} X_0$ un fibré vectoriel de Banach de type B au-dessus d'une variété complexe connexe X_0. On dit que p est holomorphe si X_0 possède un recouvrement trivialisant pour p où les fonctions de transition associées sont holomorphes.

2. Une section $f : X_0 \to E$ d'un fibré vectoriel holomorphe de Banach $E \xrightarrow{p} X_0$ est dite holomorphe si pour tout indice α (associé au recouvrement trivialisant de X_0 pour p) l'application

$$x \mapsto \mu \circ \varphi_\alpha \circ f(x), \quad x \in U_\alpha$$

est holomorphe à valeurs dans B, où $\mu : U_\alpha \times B \to B$ est la projection vers la deuxième composante. Rappelons ici que $\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times B$ est la trivialisation d'indice α.

3. On définit un morphisme holomorphe $A : E_1 \to E_2$ entre deux fibrés vectoriels holomorphes de Banach $E_i \xrightarrow{p_i} X_0$ ($i = 1{,}2$) en exigeant que les applications correspondantes dans la définition d'un morphisme ci-dessus soient holomorphes.

Un morphisme $A : E_1 \to E_2$ holomorphe qui est une bijection entre E_1 à E_2 est appelé une isomorphisme holomorphe.

On aura besoin du résultat suivant.

Théorème 5.1. Soit X_0 une variété de Stein, $E \overset{p}{\to} X_0$ un fibré vectoriel holomorphe de Banach. Alors il existe deux fibrés vectoriels holomorphes de Banach $E_1 \overset{p_1}{\to} X_0$ et $E_2 \overset{p_2}{\to} X_0$, de fibres respectives B_1 et B_2, tels que

1) $E_2 = E_1 \oplus E$,

2) E_2 est holomorphiquement trivialisable, c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme holomorphe entre E_2 et $X_0 \times B_2$.

Notons par $q : E_2 \to E$ et $i : E \to E_2$ la projection de E_2 sur E et le plongement de E dans E_2, respectivement. On a
$$q \circ i = \mathrm{Id}_E.$$

Le Théorème 5.1 est une conséquence de deux résultats suivants :

Théorème 5.2 ([5])**.** Soit E un fibré vectoriel topologique de Banach sur une variété de Stein X_0 de fibre B (un espace de Banach complexe). Alors il existe deux fibrés vectoriels de Banach topologiques E_1 et E_2 de fibres respectives B_1 et B_2 (des espaces de Banach complexes) tels que $E_2 = E \oplus E_1$ et E_2 est trivialisable, c'est-à-dire il existe un isomorphisme entre E_2 et $X_0 \times B_2$.

Théorème 5.3 ([13])**.** Si X_0 est une variété de Stein, alors la classification des fibrés vectoriels holomorphes de Banach sur X_0 et la classification de tous les fibrés vectoriels de Banach topologiques coïncident. Plus précisément,

1. Tout fibré vectoriel de Banach sur X_0 est isomorphe à un fibré vectoriel de Banach holomorphe sur X_0.

2. Si les deux fibrés vectoriels de Banach topologiques sur X_0 sont isomorphes en tant que fibrés vectoriels de Banach, alors ils sont isomorphes en tant que fibrés vectoriels holomorphes de Banach.

Chapitre 6

Espaces de fonctions holomorphes sur les revêtements réguliers

6.1 Espaces de fonctions holomorphes sur les revêtements réguliers

1. Soient X_0 une variété complexe et connexe, $p : X \to X_0$ un revêtement régulier sur X_0 ayant $G := \mathcal{C}(X,p,X_0)$ comme groupe de transformations de deck. Alors il existent un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de X_0 et un cocycle localement constant

$$\{c_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G\}$$

(c'est-à-dire $c_{\alpha,\beta}c_{\beta,\alpha} = 1$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$, $c_{\alpha\beta}c_{\beta\gamma}c_{\gamma\alpha} = 1$ sur $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$) tel que le revêtement $p : X \to X_0$ est obtenu de la réunion disjointe $\sqcup_\alpha U_\alpha \times G$ via l'identification

$$U_\alpha \times G \ni (x,g) \sim (x,g\, c_{\alpha,\beta}(x)) \in U_\beta \times G \quad \text{pour tout } x \in U_\alpha \cap U_\beta, \tag{$*$}$$

où la projection p est induite par les projections $U_\alpha \times G \to U_\alpha$.

Le deuxième ingrédient de notre construction dépend du choix d'un sous-espace linéaire fermé

$$\mathfrak{b} := \mathfrak{b}(G) \tag{6.1}$$

de l'espace $\ell_\infty(G)$ de toutes les fonctions à valeurs complexes bornées sur G (muni de la norme supremum sur G) qui est invariant par rapport à l'action de G sur $\mathfrak{b}$ par la translation à droite :

$$h \in \mathfrak{b},\ \ a \in G \quad \Rightarrow \quad R_a h \in \mathfrak{b},$$

où

$$R_a(h)(g) := h(ga), \quad g \in G.$$

Par exemple, on peut choisir $\mathfrak{b}$ comme étant l'espace $c(G)$ des fonctions qui possèdent limite à l'infini . Voici un autre exemple qui joue un rôle important dans ce qui suit.

Exemple 6.1 (Fonctions presque périodiques)**.** Une fonction complexe bornée f sur un groupe topologique (discret) G est dite presque périodique si les deux familles de ses translatées

$$\{t \mapsto f(st)\}_{s\in G}, \quad \{t \mapsto f(ts)\}_{s\in G}$$

sont relativement compacts dans $\ell_\infty(G)$ [12]. Il est prouvé dans [10] que la compacité relative d'une famille de translations (à droite ou à gauche) implique la presque périodicité.

L'espace des fonctions presque périodiques à valeurs complexes sur un groupe discret G sera noté par $AP(G)$.

Définition 6.1. Considérons une paire $(p : X \to X_0, \mathfrak{b})$ où $\mathfrak{b} \le \ell_\infty(G)$ est choisi comme dans (6.1) pour $G = \mathcal{C}(X,p,X_0)$. Une fonction holomorphe f sur X est dite une $\mathfrak{b}$-fonction holomorphe si pour tout ouvert $U_\alpha \subseteq X_0$ trivialisant

(1) $f|_{p^{-1}(U_\alpha)}$ est bornée sur $p^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times G$,

(2) pour tout $x \in U_\alpha$ la fonction

$$G \ni g \mapsto (f|_{p^{-1}(U_\alpha)})(x,g)$$

appartient à $\mathfrak{b}$.

On munit la sous-algèbre $\mathcal{O}_\mathfrak{b}(X) \subset \mathcal{O}(X)$ des $\mathfrak{b}$-fonctions holomorphes de la topologie de Fréchet de la convergence uniforme sur les sous-ensembles $p^{-1}(U_0)$, $U_0 \Subset X_0$.

2. On peut associer un fibré vectoriel de Banach holomorphe

$$C_\mathfrak{b}X_0 \xrightarrow{\tilde{p}} X_0$$

à un revêtement régulier $p : X \to X_0$ de fibre $\mathfrak{b}$ de la façon suivante : on considère premièrement la réunion disjointe

$$\bigsqcup_{i\in I} U_i \times \mathfrak{b}$$

laquelle est quotientée par la relation d'équivalence suivante :

$$U_\alpha \times \mathfrak{b} \ni (x,h) \sim (x,R_{c_{\alpha,\beta}(x)}(h)) \in U_\beta \times \mathfrak{b} \quad \text{pour tout } x \in U_\alpha \cap U_\beta, \tag{$**$}$$

où

$$R_{c_{\alpha,\beta}(x)}(h)(g) = h(g\, c_{\alpha,\beta}(x));$$

finalement la projection $\tilde{p}$ est induite des projections $U_\alpha \times \mathfrak{b} \to U_\alpha$.

Soit $\mathcal{O}(C_\mathfrak{b}X_0)$ l'espace des sections holomorphes du fibré $C_\mathfrak{b}X_0$ sur X_0. C'est une algèbre de Fréchet avec les opérations habituelles et la topologie de la convergence uniforme sur les ouverts $\widetilde{p}^{-1}(U_0)$ de $C_\mathfrak{b}X_0$ pour $U_0 \Subset X_0$.

Théorème 6.1. $\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}(X) \cong \mathcal{O}(C_{\mathfrak{b}}X_0)$.

Démonstration. **1.** Définissons une application

$$\Gamma : \mathcal{O}_{\mathfrak{b}}(X) \to \mathcal{O}(C_{\mathfrak{b}}X_0)$$

de la façon suivante : pour $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{b}}(X)$, en utilisant la représentation $(*)$ de X, pour chaque β on peut identifier la restriction $f|_{p^{-1}(U_\beta)}$ avec une fonction de deux variables, $f_\beta(x,g)$, $x \in U_\beta$, $g \in G$. Alors $f_\beta(x,\cdot) \in \mathfrak{b}$. Par $(**)$, les fonctions $\{f_\alpha\}$ déterminent une section de $C_{\mathfrak{b}}X_0$. Posons

$$\Gamma(f) = \{f_\beta\}.$$

On veut montrer que cette section est holomorphe. Il est suffisant de montrer que pour tout β la fonction $f_\beta : U_\beta \to \mathfrak{b}$ est holomorphe (comme une fonction à valeurs dans un espace de Banach, voir la Définition 5.1). Fixons β et écrivons $\hat{f} := f_\alpha$. Identifions $p^{-1}(U_\beta) \cong U_\beta \times G$. Sans perte de la généralité, U_β est un ensemble ouvert de $\mathbb{C}^n$. Soit

$$P \Subset U_\beta := \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \ : |z_j - x_j| \leq r, 1 \leq j \leq n\}$$

un polydisque centré au point $x \in U_\beta$ et de rayon r. Posons

$$P_b = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j - x_j| = r, 1 \leq j \leq n\}.$$

Étape 1. Pour un multi-indice $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, définissons

$$c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(g) := \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{P_b} \frac{\hat{f}(w,g)}{(w_1 - x_1)^{\alpha_1+1} \ldots (w_n - x_n)^{\alpha_n+1}} dw_1 \ldots dw_n, \quad g \in G.$$

Montrons que $c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \in \mathfrak{b}$. On sait que $\hat{f}(w,\cdot) \in \mathfrak{b}$, en particulier $\hat{f}(w,\cdot)$ est bornée. De plus, pour tout $1 \leq j \leq n$ et tout $w_j \in P_b$, $|w_j - x_j| = r$ ainsi la fonction $g \mapsto \frac{\hat{f}(w,g)}{(w_1-x_j)^{\alpha_1+1} \ldots (w_n - x_n)^{\alpha_n+1}}$ est intégrable, et puisque $\mathfrak{b}$ est fermé, on obtient par la définition de l'intégral de Riemann que $c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \in \mathfrak{b}$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} |c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(g)| &= \frac{1}{(2\pi)^n} \left| \int_{P_b} \frac{\hat{f}(w,g)}{(w_1 - x_1)^{\alpha_1+1} \ldots (w_n - x_n)^{\alpha_n+1}} dw_1 \ldots dw_n \right| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \sup_{g \in G} |\hat{f}(\omega,g)| \int_{P_b} \frac{|dw_1| \ldots |dw_n|}{|w_1 - x_1|^{\alpha_1+1} \ldots |w_n - x_n|^{\alpha_n+1}} \end{aligned}$$

Or, pour tout $1 \leq j \leq n$, $|w_j - x_j| = r$. Donc $|c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(g)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} ||\hat{f}||_{L^\infty(P \times G)} \int_{P_b} \frac{|dw_1| \ldots |dw_n|}{r^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + n}}$ d'où

$$|c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(g)| \leq \frac{1}{(2\pi r)^n} \frac{||\hat{f}||_{L^\infty(P \times G)}}{r^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}.$$

Finalement, nous avons

$$\|c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\|_\infty \leq C \frac{\|\hat{f}\|_{L^\infty(P \times G)}}{r^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}. \qquad (\bullet)$$

Étape 2. Définissons la fonction $F : P \to \mathfrak{b}$ par

$$F(z) := \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=0}^{\infty} c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(z_1-x_1)^{\alpha_1}\ldots(z_n-x_n)^{\alpha_n}.$$

Montrons que la série converge uniformément. Par ($\bullet$), on obtient :

$$\|c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(z_1-x_1)^{\alpha_1}\ldots(z_n-x_n)^{\alpha_n}\|_\infty \leq C\|f\|_{L^\infty(P\times G)}\prod_{i=1}^{n}\left|\frac{z_i-x_i}{r}\right|^{\alpha_i},$$

alors la série converge uniformément sur le polydisque P.

Donc F est bien définie et holomorphe sur P, à valeurs dans $\mathfrak{b}$, c'est-à-dire $F \in \mathcal{O}(P, \mathfrak{b}(G))$. De plus, $F|_{p^{-1}(U_\beta)} = f_\beta$. On en déduit que f_β est holomorphe pour tout β, d'où f est holomorphe.

2. Réciproquement, définissons $\Upsilon : \mathcal{O}(C_\mathfrak{b}X_0) \to \mathcal{O}_\mathfrak{b}(X)$, l'inverse de Γ de la façon suivante. Soit $\{f_\beta\}$ une section holomorphe du fibré $C_\mathfrak{b}X_0$, c'est-à-dire une famille de fonctions $f_\beta \in \mathcal{O}(U_\beta,\mathfrak{b})$ sujettes à la relation

$$f_\beta(x) = R_{c_{\beta,\gamma}(x)}(f_\gamma(x)), \quad x \in U_\beta \cap U_\gamma.$$

Cette section induit de façon naturelle une fonction f définie sur X ; si on identifie $p^{-1}(U_\beta)$ avec $U_\beta \times G$, alors on pose

$$f(x,g) := f_\beta(x)(g), \quad (x,g) \in U_\beta \times G$$

pour tout β. On définit $\Upsilon(\{f_\beta\}) := f$.

Montrons que $f \in \mathcal{O}(X)$. Il est suffisant de montrer que $f_\beta(\cdot, g) \in \mathcal{O}(U_\beta)$ pour tout β et pour tout $g \in G$ fixés. On sait que $f_\beta : U_\beta \to \mathfrak{b}$ est holomorphe et que $\mathfrak{b}$ est un espace de Banach en tant que fermé de $\ell_\infty(G)$. Donc, pour tout $\varphi \in \mathfrak{b}^*$, $\varphi(f_i) \in \mathcal{O}(U_\beta)$. Prenons en particulier la fonctionnelle $\varphi_g \in \mathfrak{b}^*$ définie par

$$\varphi_g(h) = h(g), \quad h \in \mathfrak{b}.$$

On obtient que pour tout $x \in U_\beta$, $\varphi_g(f_\beta(x)) = f_\beta(x,g)$ donc $f_\beta(\cdot,g) = \varphi_g(f_\beta) \in \mathcal{O}(U_\beta)$ pour tout $(x,g) \in U_\beta \times G$. On a $f_\beta|_{U_\beta\times G} = f_\gamma|_{U_\gamma\times G}$. Comme f_γ est holomorphe sur U_γ, f l'est aussi. Ainsi f est holomorphe sur X.

Finalement on vérifie aisément que $\Gamma \circ \Upsilon = \mathrm{I}d$ et $\Upsilon \circ \Gamma = \mathrm{I}d$. $\square$

6.2 Prolongement holomorphe presque périodique

1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe.

Définition 6.2 (H. Bohr)**.** Une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(T)$ sur domaine tube $T = \mathbb{R}^n + i\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dite holomorphe presque périodique si pour tout sous-domaine tube $T' = \mathbb{R}^n + i\Omega'$, $\Omega' \Subset \Omega$ (Ω' ouvert et relativement compact) la famille des translations

$$\{z \mapsto f(z+s),\, z \in T'\}_{s \in \mathbb{R}^n}$$

est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur T'.

Un résultat fondamental de la théorie de H. Bohr [2] est le théorème d'approximation qui nous renseigne que toutes les fonctions holomorphes presque périodiques, sur tout sous-domaine tube T' de T est la limite uniforme, d'une suite de polynômes holomorphes trigonométriques

$$z \mapsto \sum_{k=1}^{m} c_k e^{i\langle z, \lambda_k \rangle}, \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}^n, \tag{$\bullet\bullet$}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire dans $\mathbb{C}^n$. Réciproquement, une fonction (holomorphe) définie sur T qui est la limite uniforme, sur toute sous-domaine tube T' de T, d'une suite des polynômes holomorphes trigonométriques est presque périodique sur T.

Posons

$$p(z) := (e^{i2\pi z_1}, \ldots, e^{i2\pi z_n}), \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in T.$$

On considère T comme un revêtement régulier $p : T \to T_0$,

$$T_0 := p(T) \subset \mathbb{C}^n$$

avec $\mathbb{Z}^n$ comme groupe des transformations de deck, et prend

$$\mathfrak{b} := AP(\mathbb{Z}^n),$$

voir l'Exemple 6.1. Notons que T_0 est pseudo-convexe, voir [4, sect. 2]. Ceci nous permet de considérer l'algèbre de Fréchet

$$\mathcal{O}_{AP}(T) := \mathcal{O}_{\mathfrak{b}}(T),$$

voir la Définition 6.1 .

Théorème 6.2. Une fonction $f \in \mathcal{O}(T)$ est presque périodique si et seulement si $f \in \mathcal{O}_{AP}(T)$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{O}(T)$ qui est presque périodique, montrons que $f \in \mathcal{O}_{AP}(T)$. Pour tout $U_0 \Subset T_0$, f est bornée sur $p^{-1}(U_0) \subset T$ en tant qu'une fonction holomorphe presque périodique sur T. Fixons maintenant $z_0 \in T_0$. On veut montrer que f est presque périodique sur $p^{-1}(z_0) \cong \mathbb{Z}^n$. Fixons $x_0 \in p^{-1}(z_0)$. La famille de translations de $f|_{p^{-1}(z_0)}$ coïncide avec $\{s \mapsto f(x_0+s), s \in \mathbb{Z}^n\}$. Mais on sait déjà que $\{s \mapsto f(x_0+s), s \in \mathbb{Z}^n\}$ est relativement compact, donc f est presque périodique sur $p^{-1}(z_0)$.

Réciproquement, supposons que $f \in \mathcal{O}_{AP}(T)$. Fixons $T' \subset T$, $T' = \mathbb{R}^n + i\Omega'$, $\Omega' \Subset \Omega$. Par [3, Théorème 2.29], pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un polynôme holomorphe trigonométrique P_ε (voir (●●)) tel que

$$\sup_{z \in T'} |f(z) - P_\varepsilon(z)| < \epsilon.$$

Alors par le théorème d'approximation de Bohr la fonction f est presque périodique. □

2. Soit $m \geq 1$ un entier quelconque. On fixe des points $\zeta_k \in T_0$ et des fonctions

$$f_k \in AP(p^{-1}(\zeta_k)) \cong AP(\mathbb{Z}^n), \quad 1 \leq k \leq m$$

qui sont compatibles au sens suivant : si $\zeta_k \in U_\beta \cap U_\gamma$ alors

$$f_\gamma(\zeta_k, g) = f_\beta(\zeta_k, g\, c_{\gamma,\beta}(\zeta_k))$$

pour tout $1 \leq k \leq m$ où le 1-cocycle $\{c_{\alpha,\beta}\}$ est celui associé au revêtement $p : T \to T_0$.

On peut finalement montrer le résultat suivant sur le prolongement holomorphe presque périodique. C'est un cas spécial de [3, théorème 2.10].

Théorème 6.3. Il existe une fonction $F \in \mathcal{O}(T)$ presque périodique telle que

$$F|_{p^{-1}(\zeta_k)} = f_k.$$

Pour démontrer le théorème, on aura besoin d'un résultat suivant (analogue au Théorème 4.2) :

Théorème 6.4 ([6, théorème 18.1])**.** Soit X une variété de Stein, Y une sous variété complexe fermée de X. Alors toute fonction holomorphe bornée à valeurs dans un espace de Banach complexe possède un prolongement holomorphe sur X.

Démonstration du théorème 6.3. La famille $\{f_k,\ 1 \leq k \leq m\}$ détermine une section du fibré vectoriel holomorphe de Banach $C_{AP}T_0 := C_{\mathfrak{b}}T_0$ sur le sous-ensemble discret $Z := \{\zeta_k\}_{k=1}^m \subset T_0$. On note cette section par f.

D'après le Théorème 5.1, il existe deux fibrés vectoriels holomorphes de Banach E_1 et E_2 avec des fibres respectives B_1 et B_2 telles que

$$E_2 = C_{AP}T_0 \oplus E_1$$

et E_2 est holomorphiquement trivialisable. Rappelons que q désigne la projection de E_2 sur $C_{AP}T_0$, et ι l'inclusion de $C_{AP}T_0$ dans E_2. Par la construction, $\tilde{f}$ est une section de E_2. En appliquant une trivialisation holomorphe $e : E_2 \to T_0 \times B_2$, on obtient que $e(\tilde{f})$ est une fonction sur Z à valeurs dans B_2. Maintenant, on applique le Théorème 6.4 pour obtenir une fonction holomorphe $\tilde{F}$ à valeurs dans B_2 telle que

$$\tilde{F}|_Z = e(\tilde{f}).$$

La fonction recherchée est

$$F := q(e^{-1}(\tilde{F})).$$

□

Conclusion

Dans ce mémoire, l'objectif était de discuter l'approche à l'étude des fonctions holomorphes presque périodiques basée sur les méthodes de l'analyse fonctionnelle. Pour bien mener cette étude, nous avons préalablement relevé quelques notions importantes sur les revêtements, les variétés de Stein, les fibrés vectoriels et la cohomologie de Čech.

Cette approche nous a permis d'établir le résultat clé de notre mémoire sur le prolongement holomorphe presque périodiques.

Un problème reste néanmoins incompris dans le cadre de notre étude, il s'agit de déterminer l'existence du prolongement d'une fonction harmonique presque périodique à plusieurs variables. Ce problème reste ouvert et constituera l'objet de nos prochaines études.

Bibliographie

[1] J. Adamek, H. Herrlich, G. Strecker, *Abstract and Concrete Categories : the Joy of Cats.* Wiley, 1990.

[2] H. Bohr, *Almost Periodic Functions*, Chelsea, 1951.

[3] A. Brudnyi et D.Kinzebulatov, Towards Oka-Cartan theory for algebras of holomorphic functions on coverings of Stein manifolds. *Revista Math. Iberoamericana* **31** (2015), 1167-1230.

[4] A. Brudnyi et D.Kinzebulatov, Holomorphic almost periodic functions on converings of complex manifolds. *New York J. Math.* **17a** (2011), 267-300.

[5] L.Bungart, On analytic fiber bundles I. Holomorphic fiber bundles with infinite dimensional fibers. *Topology* **7** (1968), 55-68.

[6] L. Bungart, Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas. *Trans. Amer. Math. Soc.* **111** (1964), 317-344.

[7] J.-P. Demailly, *Complex Analytic and Differential Geometry*, 2012.

[8] H. Grauert et R. Remmert, *Theory of Stein Spaces.* Springer, 2004.

[9] R. Gunning, *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables*, Princeton University Press, 1990.

[10] W.Maak, Eine neue definition der fastperiodischen Funktionen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **11** (1936), 240-244.

[11] J. Munkres. *Topology*, Pearson, 2014.

[12] J. von Neumann, Almost periodic functions in a group.I. *Trans. Amer. Math. Soc.* **36** (1934), 445-492.

[13] R. Ouzilou, Classification holomorphique des fibrés Banachiques. *C.R.Acad.Sci.Paris. Sér A-B* **268** (1969), 1276-1278.

[14] M. Zaidenberg, S. G. Krein, P. Kuchment, A. Pankov, Banach bundles and linear operators. *Russian Math. Surveys* **30** (1975), 115-175.